FOLIA OECONOMICA CRACOVIENSIA
Vol. LV (2014) PL ISSN 0071-674X

ESTYMACJA MOMENTÓW ZWYKŁYCH WEKTORA LOSOWEGO OPARTYCH NA DEFINICJI POTĘGI WEKTORA[1]

KATARZYNA BUDNY
Katedra Matematyki Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie
e-mail: budnyk@uek.krakow.pl

ABSTRACT

K. Budny. *Estimation of the raw moments of a random vector based on the definition of the power of a vector.* Folia Oeconomica Cracoviensia 2014, 55: 81–96.

In this paper we propose the consistent and unbiased estimators of the raw (uncorrected) moments of a random vector, moments that are based on the definition of the power of a vector. For the distributions of the estimators we find essential characteristics, such as mean vector, variance or total variance. We also calculate the covariance and the covariance matrix between the relevant sample raw moments. Moreover, the asymptotic behaviour of their central moments of even orders are established.

STRESZCZENIE

W artykule przedstawione zostały zgodne i nieobciążone estymatory momentów zwykłych wektora losowego opartych na definicji potęgi wektora. Wyznaczono podstawowe charakterystyki dla ich rozkładów takie jak wektor wartości oczekiwanych, wariancja lub wariancja całkowita. Obliczono także postaci kowariancji lub macierzy kowariancji miedzy odpowiednimi momentami w próbie wielowymiarowej. Ponadto ustalone zostało asymptotyczne tempo wzrostu ich momentów centralnych parzystych rzędów.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

power of a vector, raw moment of a random vector, estimator, multivariate distribution

potęga wektora, moment zwykły wektora losowego, estymator, rozkład wielowymiarowy

---

[1] W artykule zawarto niektóre cząstkowe wyniki rozprawy doktorskiej — Budny (2014a), prezentowanej przez Autorkę na zebraniu naukowym Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki dnia 9 października 2014 roku.

WSTĘP

Jednymi z podstawowych charakterystyk rozkładu zmiennej losowej jednowymiarowej są momenty zwykłe (por. np. Shao (2003), s. 28; Bilingsley (2009), s. 274). W analizie rozkładów wielowymiarowych jako klasyczne uogólnienia tych wielkości rozważa się momenty zwykłe mieszane (por. np. Johnson, Kotz i Kemp (1992), s. 46) oraz wyznaczone za pomocą iloczynu Kroneckera tzw. wektorowe momenty zwykłe — por. np. Holmquist (1988), Genton, He i Liu (2001), Kim i Mallik (2003).

Tatar (1996, 1999) opierając się na definicji potęgi wektora zaproponował m.in. kolejne, odmienne od przedstawionych powyżej, wielowymiarowe uogólnienie pojęcia momentu zwykłego zmiennej losowej. Istotny, z punktu widzenia zastosowań, jest problem estymacji rozważanych charakterystyk. Celem tego opracowania jest skonstruowanie co najmniej zgodnych estymatorów momentów zwykłych wektora losowego opartych na potędze wektora. Otwiera to możliwość wykorzystania tych momentów w analizie danych wielowymiarowych.

W kolejnych częściach pracy przypominamy podstawowe definicje, przedstawiamy estymatory nowych momentów zwykłych i określamy ich podstawowe własności. Pracę zamykają uwagi końcowe.

1. MOMENTY ZWYKŁE I CENTRALNE OPARTE NA POTĘDZE WEKTORA

Definicja 1.1. (Tatar (1996, 1999)) Niech H będzie przestrzenią Hilberta. Dla dowolnego wektora $v \in H$ oraz dowolnej liczby $k \in N$ *k-tą potęgę wektora* v definiujemy w następujący sposób:

$$v^o = 1 \in R \text{ oraz } v^r = \begin{cases} v^{r-1} \cdot v & \text{dla } r - \text{nieparzystych} \\ \left\langle v^{r-1}, v \right\rangle & \text{dla } r - \text{parzystych} \end{cases}$$

W pracy rozważać będziemy przestrzeń Hilberta $(R^n, R, +, \cdot)$, w której określono klasyczny (euklidesowy) iloczyn skalarny postaci $\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i w_i$, gdzie $v, w \in R^n$.

Ponadto niech $L_n^r(\Omega)$ oznacza przestrzeń wektorów losowych całkowalnych w r-tej potędze tj. $L_n^r(\Omega) = \left\{ X : \Omega -> R^n : X \text{ wektor losowy i } \int_\Omega \|X\|^r dP < +\infty \right\}$.

W literaturze przedmiotu wielkość $E[\|X\|^r] = \int_\Omega \|X\|^r dP$ nazywana jest czasem momentem rzędu r wektora losowego X i oznaczana jako $E[X^r]$ (por. Bilodeau i Brenner (1999), s. 18). W tym opracowaniu, za Tatarem (2000, 2002), wyrażenie to określać będziemy terminem momentu absolutnego rzędu r wektora losowego X.
Załóżmy, że $X : \Omega \to R^n$ jest wektorem losowym, dla którego istnieje moment absolutny rzędu r.

Definicja 1.2. (Tatar (1996, 1999)) *Moment zwykły rzędu r wektora losowego* $X : \Omega \to R^n$ to wyrażenie określone jako

$$\alpha_{r,n}(X) = E[X^r]. \tag{1.1}$$

Zauważmy, że moment zwykły wektora losowego rzędu 1 to wektor wartości oczekiwanych, tj.

$$\alpha_{1,n}(X) = m = EX.$$

Tatar (1996, 1999) zaproponował także wielowymiarowe uogólnienie momentów centralnych zmiennej losowej.

Definicja 1.3. (Tatar (1996, 1999)) *Momentem centralnym rzędu r wektora losowego* $X : \Omega \to R^n$ nazywamy wielkość wyrażoną jako

$$\mu_{r,n}(X) = E[(X - EX)^r]. \tag{1.2}$$

Moment centralny rzędu drugiego definiuje *wariancję wektora losowego* $X : \Omega \to R^n$ (por. Tatar (1996, 1999)). Dla tej wielkości zarezerwujemy oznaczenie D^2X. Zauważmy, że wariancja wektora losowego $X = (X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to R^n$ przyjmuje postać:

$$D^2X = \sum_{i=1}^{n} D^2X_i.$$

Suma wariancji brzegowych wektora losowego w literaturze przedmiotu określana jest także jako wariancja całkowita wektora losowego (por. Bilodeu i Brenner (1999), s. 162).

Zauważmy, że zgodnie z koncepcją potęgi wektora, jeżeli r jest liczbą parzystą to $\alpha_{r,n}, \mu_{r,n} \in R$, czyli są skalarami. Natomiast, jeśli r jest liczbą nieparzystą to $\alpha_{r,n}, \mu_{r,n} \in R^n$, a więc otrzymujemy wektory.

W celu zastosowania tych wielkości do analizy danych wielowymiarowych niezbędne jest skonstruowanie ich odpowiednich estymatorów. W kolejnym rozdziale przedstawiona zostanie propozycja zgodnych i nieobciążonych estymatorów momentów zwykłych wektora losowego wraz z omówieniem ich podstawowych własności.

2. ESTYMATORY MOMENTÓW ZWYKŁYCH WEKTORA LOSOWEGO — DEFINICJA I PODSTAWOWE WŁASNOŚCI

Załóżmy, że $X^1 : \Omega \to R^n, \ldots, X^k : \Omega \to R^n$ jest próbą prostą z rozkładu n-wymiarowego, o skończonym momencie absolutnym rzędu r, natomiast k to liczebność próby.

Definicja 2.1. *Estymator momentu zwykłego rzędu r wektora losowego (moment zwykły rzędu r w próbie wielowymiarowej) to*

$$a_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(X^i\right)^r}{k}.$$

Zgodnie z definicją potęgi wektora, jeżeli r jest liczbą parzystą to $a_{r,n}$ jest zmienną losową jednowymiarową. W przypadku gdy r jest liczbą nieparzystą jako $a_{r,n}$ uzyskujemy wektor losowy, czyli zmienną losową wielowymiarową.

Analizę własności tak skonstruowanych estymatorów poprzedzimy twierdzeniem, które okaże się użyteczne w przeprowadzeniu niezbędnych dowodów.

Twierdzenie 2.1. (por. np. Bilodeau i Brenner 1999, str. 27) Załóżmy, że $X^1 : \Omega \to R^{n_1}, \ldots, X^k : \Omega \to R^{n_k}$ to wektory losowe. Wówczas dla wszystkich funkcji borelowskich $g_1 : R^{n_1} \to R, \ldots, g_k : R^{n_k} \to R$ dla których $E\left|g_i\left(X^i\right)\right| < +\infty$, gdzie $i \in \{1, \ldots, k\}$ zachodzi następująca równoważność

$$X^1, \ldots, X^k \text{ są niezależne} \Leftrightarrow E\left[\prod_{i=1}^{k} g_i\left(X^i\right)\right] = \prod_{i=1}^{k} E\left[g_i\left(X^i\right)\right].$$

Opierając się na rozumowaniu przeprowadzonym dla estymatorów momentów zwykłych zmiennych losowych jednowymiarowych (por. Cramer (1958), s. 333) w dalszej części tego rozdziału przedstawimy wybrane własności momentów zwykłych w próbie wielowymiarowej.

Na początek wyznaczymy podstawowe charakterystyki dla ich rozkładów takie jak wektor wartości oczekiwanych, wariancję, czy też wariancję całkowitą.

Twierdzenie 2.2. Niech zatem $X^1 : \Omega \to R^n, \ldots, X^k : \Omega \to R^n$ będzie próbą prostą z rozkładu wielowymiarowego, o skończonym momencie absolutnym rzędu $2r$. Wektor wartości oczekiwanych oraz wariancja całkowita (czyli moment centralny rzędu drugiego) momentu zwykłego rzędu r w próbie wielowymiarowej przyjmują odpowiednio postaci:

$$E[a_{r,n}] = \alpha_{r,n}\,, \tag{2.2}$$

$$D^2 a_{r,n} = \frac{\alpha_{2r,n} - \alpha_{r,n}^2}{k}\,. \tag{2.3}$$

Dowód: Biorąc pod uwagę własność liniowości całki oraz fakt, że $X^1, \ldots, X^k$ to próba prosta, w niemalże oczywisty sposób, uzyskujemy postać (2.2).

Dla dowodu równości (2.3) rozważymy dwa przypadki, w których uwzględnimy podział momentów zwykłych wektora losowego na momenty parzystego oraz nieparzystego rzędu.

1. Załóżmy, że r to liczba parzysta.

Wówczas dla każdego $i \in \{1, \ldots, k\}$ $\left(X^i\right)^r$ jest zmienną losową (jednowymiarową). Ponadto, na podstawie twierdzenia 2.1, zmienne losowe $\left(X^1\right)^r, \ldots, \left(X^k\right)^r$ są niezależne. Podstawowe własności wariancji zmiennej losowej (por. np. Jakubowski i Sztencel (2004), s. 84, 86) implikują wzór

$$D^2 a_{r,n} = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X^i\right)^r}{k}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{k} D^2\left(\left(X^i\right)^r\right)}{k^2}.$$

2. Niech teraz r będzie liczbą nieparzystą.

Podstawowe własności wariancji całkowitej — por. Tatar (1996, 1999) — oraz wartości oczekiwanej wektora losowego uzasadniają poniższe przekształcenia:

$$D^2 a_{r,n} = D^2\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}\left(X^i\right)^r}{k}\right) = \frac{1}{k^2} D^2\left(\sum_{i=1}^{k}\left(X^i\right)^r\right) = \frac{1}{k^2} E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\left(\left(X^i\right)^r - E\left[\left(X^i\right)^r\right]\right)\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} E\left[\left(\left(X^i\right)^r - E\left[\left(X^i\right)^r\right]\right)^2\right] + \frac{1}{k^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\sum_{p=1}^{n} E\left[\left(\left(\left(X^i\right)^r\right)_p - E\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_p\right]\right)\left(\left(\left(X^j\right)^r\right)_p - E\left[\left(\left(X^j\right)^r\right)_p\right]\right)\right].$$

Ponadto, zastosowanie twierdzenia 2.1 dla funkcji borelowskich $g_i : R^n \to R$ postaci $g_i(x) = \left(x^r\right)_p - E[\left(\left(X^i\right)^r\right)_p]$, gdzie $i \in \{1,\ldots,k\}$ oraz $p \in \{1,\ldots,n\}$, prowadzi do

$$D^2 a_{r,n} = \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} E\left[\left(\left(X^i\right)^r - E\left[\left(X^i\right)^r\right]\right)^2\right] +$$

$$+\frac{1}{k^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}\sum_{p=1}^{n} E\left[\left(\left(\left(X^i\right)^r\right)_p - E\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_p\right]\right)\right]E\left[\left(\left(\left(X^j\right)^r\right)_p - E\left[\left(\left(X^j\right)^r\right)_p\right]\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{k^2}\sum_{i=1}^{k} E\left[\left(\left(X^i\right)^r - E\left[\left(X^i\right)^r\right]\right)^2\right] + 0 .$$

Mamy więc i w tym przypadku

$$D^2 a_{r,n} = \frac{\sum_{i=1}^{k} D^2\left(\left(X^i\right)^r\right)}{k^2} .$$

Rozważmy teraz, w obydwu przypadkach, wektor losowy $X : \Omega \to R^n$ o tym samym rozkładzie co wektory losowe $X^1,\ldots,X^k$. Wówczas

$$D^2 a_{r,n} = \frac{kD^2\left(X^r\right)}{k^2} = \frac{D^2\left(X^r\right)}{k} .$$

Dzięki własności wariancji całkowitej wektora losowego oraz potęgi wektora — por. Tatar (1996, 1999) — otrzymujemy

$$D^2 a_{r,n} = \frac{E[\left(X^r\right)^2] - \left(E\left[X^r\right]\right)^2}{k} = \frac{E\left[X^{2r}\right] - \left(E\left[X^r\right]\right)^2}{k} = \frac{\alpha_{2r,n} - \alpha_{r,n}^2}{k},$$

co należało udowodnić.

Ze wzoru (2.2), w oczywisty sposób, wynika bardzo istotny wniosek.

Wniosek 2.1. Moment zwykły rzędu r w próbie wielowymiarowej jest estymatorem nieobciążonym momentu zwykłego rzędu r wektora losowego, tzn. $E\left(a_{r,n}\right) = \alpha_{r,n}$.

Postać (2.3) natomiast, wraz z wielowymiarową wersją nierówności Czebyszewa zaproponowaną w pracy Osiewalski i Tatar (1999), uzasadnia kolejną ważną własność estymatorów momentów zwykłych wektora losowego, mianowicie własność zgodności.

Wniosek 2.2. Moment zwykły rzędu r w próbie wielowymiarowej jest estymatorem zgodnym momentu zwykłego rzędu r dla rozkładu wielowymiarowego o skończonym momencie absolutnym rzędu $2r$, tzn. dla każdego $\varepsilon > 0$ spełniony jest warunek:

$$\lim_{k \to \infty} P\left(\left\| a_{r,n} - \alpha_{r,n} \right\| > \varepsilon\right) = 0 .$$

Dowód: Istotnie, zauważmy, że przy ustalonym $\varepsilon > 0$ dzięki wielowymiarowej nierówności Czebyszewa — por. Osiewalski i Tatar (1999) — otrzymujemy

$$P\left(\left\| a_{r,n} - E\left[a_{r,n}\right] \right\| > \varepsilon\right) \leq \frac{D^2 a_{r,n}}{\varepsilon^2} . \tag{2.4}$$

Nierówność (2.4), dzięki formule (2.3), można przedstawić jako

$$P\left(\left\| a_{r,n} - \alpha_{r,n} \right\| > \varepsilon\right) \leq \frac{\alpha_{2r,n} - \alpha_{r,n}^2}{k\varepsilon^2} .$$

Do tezy prowadzi zatem twierdzenie o trzech ciągach.

Zauważmy, że własność zgodności estymatorów $a_{r,n}$ może być także rozpatrywana jako wniosek z *Pierwszego Uogólnionego Słabego Prawa Wielkich Liczb Czebyszewa*; por. Tatar, (2003). Przedstawione w tym opracowaniu uzasadnienie wniosku 2.2 oparte jest na dowodzie PUPWLC z pracy Tatara (2003).

W kolejnym twierdzeniu uogólnimy wzór (2.3).

Twierdzenie 2.3. Załóżmy, że rozkład w populacji wielowymiarowej ma skończony moment absolutny rzędu $r + v$. Wówczas

$$E\left[\left(a_{r,n} - \alpha_{r,n}\right) \circ \left(a_{v,n} - \alpha_{v,n}\right)\right] = \frac{\alpha_{r+v,n} - \alpha_{r,n} \circ \alpha_{v,n}}{k} , \tag{2.5}$$

gdzie "$\circ$" to operator następującej postaci

$$v \circ w = \begin{cases} vw & \text{gdy } v, \text{w} - \text{l. rzeczywiste} \\ v \cdot w & \text{gdy } v - \text{l. rzeczywista, } w - \text{ wektor} \\ w \cdot v & \text{gdy } w - \text{l. rzeczywista, } v - \text{ wektor} \\ \langle v, w \rangle & \text{gdy } v, \text{w} - \text{wektory} \end{cases}$$

Dowód: Na początek rozważmy momenty zwykle w próbie wielowymiarowej parzystych rzędów. W tym przypadku wielkość $E[(a_{r,n}-\alpha_{r,n})\circ(a_{v,n}-\alpha_{v,n})]$ jest równa klasycznie definiowanej kowariancji między zmiennymi losowymi. Wobec tego należy wyznaczyć postać wyrażenia $E[a_{2s,n}a_{2t,n}]-\alpha_{2s,n}\alpha_{2t,n}$. Ponadto zauważmy, że

$$E\left[a_{2s,n}a_{2t,n}\right]=\frac{\alpha_{2s+2t,n}+(k-1)\alpha_{2s,n}\alpha_{2t,n}}{k}. \tag{2.6}$$

Istotnie, podstawowe własności wartości oczekiwanej uzasadniają poniższe przekształcenia

$$E\left[a_{2s,n}a_{2t,n}\right]=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{k}E\left[\left(X^i\right)^{2s}\left(X^j\right)^{2t}\right]}{k^2}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{k}E\left[\left(X^i\right)^{2s+2t}\right]+\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}E\left[\left(X^i\right)^{2s}\left(X^j\right)^{2t}\right]}{k^2}.$$

Natomiast fakt, że $X^1,\ldots,X^k$ to próba losowa prosta oraz twierdzenie 2.1 prowadzą do ciągu równości

$$E\left[a_{2s,n}a_{2t,n}\right]=\frac{k\alpha_{2s+2t,n}+\sum\limits_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}E\left[\left(X^i\right)^{2s}\right]E\left[\left(X^j\right)^{2t}\right]}{k^2}=$$

$$=\frac{k\alpha_{2s+2t,n}+k(k-1)\alpha_{2s,n}\alpha_{2t,n}}{k^2}=\frac{\alpha_{2s+2t,n}+(k-1)\alpha_{2s,n}\alpha_{2t,n}}{k},$$

co w oczywisty sposób uzasadnia (2.5) dla rozważanych momentów zwykłych w próbie wielowymiarowej.

Przejdźmy zatem do przypadku estymatorów momentów zwykłych w populacji wielowymiarowej parzystego oraz nieparzystego rzędu. Mamy zatem wyznaczyć wielkość $E[a_{2s,n}\cdot a_{2t+1,n}]-\alpha_{2s,n}\cdot\alpha_{2t+1,n}$. Zauważmy, że rozumowanie analogiczne do przedstawionego w uzasadnieniu równości (2.6) prowadzi do wyrażenia

$$E\left[a_{2s,n}\cdot a_{2t+1,n}\right]=\frac{\alpha_{2s+2t+1,n}+(k-1)\alpha_{2s,n}\cdot\alpha_{2t+1,n}}{k}. \tag{2.7}$$

Istotnie,

$$E\left[a_{2s,n}\cdot a_{2t+1,n}\right]=\frac{\sum_{i,j=1}^{k}E\left[\left(X^{i}\right)^{2s}\cdot\left(X^{j}\right)^{2t+1}\right]}{k^{2}}=\frac{\sum_{i=1}^{k}E\left[\left(X^{i}\right)^{2s+2t+1}\right]+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}E\left[\left(X^{i}\right)^{2s}\cdot\left(X^{j}\right)^{2t+1}\right]}{k^{2}}.$$

Ponownie z uwagi na fakt, że $X^1,\dots,X^k$ to próba losowa prosta oraz twierdzenie 2.1. zastosowane kolejno do wszystkich współrzędnych wektora $\left(X^{j}\right)^{2t+1}$ uzyskujemy

$$E\left[a_{2s,n}\cdot a_{2t+1,n}\right]=\frac{k\alpha_{2s+2t+1,n}+\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{k}E\left[\left(X^{i}\right)^{2s}\right]\cdot E\left[\left(X^{j}\right)^{2t+1}\right]}{k^{2}}$$

$$=\frac{k\alpha_{2s+2t,n}+k(k-1)\alpha_{2s,n}\cdot\alpha_{2t+1,n}}{k^{2}}=\frac{\alpha_{2s+2t,n}+(k-1)\alpha_{2s,n}\cdot\alpha_{2t+1,n}}{k},$$

co prowadzi do postaci (2.5) dla rozważanych momentów.

Jako ostatni rozpatrzymy przypadek momentów zwykłych w próbie wielowymiarowej nieparzystych rzędów. I tutaj także rozumowanie będzie analogiczne do przedstawionych powyżej. Zauważmy, że

$$E[\left(a_{2s+1,n}-\alpha_{2s+1,n}\right)\circ\left(a_{2t+1,n}-\alpha_{2t+1,n}\right)]=E[\left\langle a_{2s+1,n},a_{2t+1+1,n}\right\rangle]-\left\langle \alpha_{2s+1,n},\alpha_{2t+1,n}\right\rangle.$$

Ponadto,

$$E\left[\left\langle a_{2s+1,n},a_{2t+1,n}\right\rangle\right]=\frac{\alpha_{(2s+1)+(2t+1),n}+(k-1)\left\langle\alpha_{2s+1,n},\alpha_{2t+1,n}\right\rangle}{k},$$

co kończy dowód twierdzenia.

Dzięki formule (2.5) uzyskujemy postać kowariancji, w sensie klasycznej definicji (por. Jakubowski i Sztencel (2004), s. 86), między estymatorami momentów centralnych parzystych rzędów, tj.

$$\mu_{11}\left(a_{2s,n},a_{2t,n}\right)=\operatorname{cov}\left(a_{2s,n},a_{2t,n}\right)=\frac{\alpha_{2s+2t,n}-\alpha_{2s,n}\alpha_{2t,n}}{k}\qquad(2.8)$$

oraz macierze kowariancji między momentami zwykłymi parzystego rzędu i współrzędnymi momentów zwykłych nieparzystego rzędu w próbie wielowymiarowej, tj.

$$Cov\left(a_{2s+1,n}, a_{2t,n}\right) = \frac{\alpha_{(2s+1)+2t,n} - \alpha_{2t,n} \cdot \alpha_{2s+1,n}}{k} \tag{2.9}$$

oraz

$$\left(Cov\left(a_{2s,n}, a_{2t+1,n}\right)\right)^T = \frac{\alpha_{2s+(2t+1),n} - \alpha_{2s,n} \cdot \alpha_{2t+1,n}}{k}. \tag{2.10}$$

3. ASYMPTOTYCZNE TEMPO WZROSTU MOMENTÓW CENTRALNYCH PARZYSTEGO RZĘDU ESTYMATORÓW MOMENTÓW ZWYKŁYCH WEKTORA LOSOWEGO

Punktem wyjścia do rozważań prowadzonych w tym rozdziale będzie następująca własność

$$D^2 a_{r,n} = E[\left(a_{r,n} - \alpha_{r,n}\right)^2] = O\left(k^{-1}\right), \tag{3.1}$$

co oznacza, że wariancja całkowita, czyli moment centralny rzędu drugiego estymatora momentu zwykłego rzędu r jest co najwyżej rzędu k^{-1}.

Obecnie zajmiemy się wyznaczeniem asymptotycznego tempa wzrostu momentów centralnych, opartych na definicji potęgi wektora, dowolnych parzystych rzędów dla momentów zwykłych w próbie wielowymiarowej, a zatem uogólnieniem własności (3.1). Sformułowanie odpowiedniej, ogólnej zależności poprzedzimy pomocniczym lematem 3.1, w którym przedstawiona zostanie nierówność mająca istotne znaczenie w przeprowadzeniu niezbędnych dowodów formalnych.

Lemat 3.1. (por. Bilodeau, Brenner (1999), s. 19) Jeżeli $X_1 : \Omega \to R, \dots, X_n : \Omega \to R$ są zmiennymi losowymi należącymi do przestrzeni $L^p(\Omega)$ to

$$E\left[\prod_{i=1}^{n} |X_i|^{p_i}\right] \le \prod_{i=1}^{n} \left(E\left[|X_i|^p\right]\right)^{\frac{p_i}{p}}, \tag{3.2}$$

gdzie $p_i \ge 0$ dla wszystkich $i \in \{1, \dots, n\}$ oraz $p_1 + \dots + p_n = p$.

Dowód: Nierówność ta wynika wprost z klasycznej nierówności Höldera (por. np. Bilodeau, Brenner (1999), s. 19).

Przejdźmy zatem do sformułowania zapowiadanej zależności.

Twierdzenie 3.1. Niech $X^1 : \Omega \to R^n, \dots, X^k : \Omega \to R^n$ będzie wielowymiarową próbą prostą z rozkładu o skończonym momencie absolutnym rzędu $2sr$. Wówczas moment centralny rzędu $2s$ momentu zwykłego rzędu r w próbie wielowymiarowej jest co najwyżej rzędu k^{-s}, czyli

$$E[(a_{r,n} - \alpha_{r,n})^{2s}] = O(k^{-s}), \tag{3.3}$$

tzn. że istnieją takie stałe $k_0 > 0$ oraz $C > 0$, że dla każdego $k \geq k_0$ zachodzi nierówność:

$$E[(a_{r,n} - \alpha_{r,n})^{2s}] \leq C \cdot k^{-s}.$$

Dowód: Na początek rozważmy przypadek, gdy r jest liczbą parzystą. Wobec tego $\alpha_{r,n}$ to zmienna losowa jednowymiarowa, natomiast jako $\alpha_{r,n}$ uzyskujemy liczbę rzeczywistą. Zgodnie z definicją momentu zwykłego w próbie, po zastosowaniu prostych przekształceń, otrzymujemy :

$$E\left[(a_{r,n} - \alpha_{r,n})^{2s}\right] = E\left[\left(\frac{\sum_{i=1}^{k}(X^i)^r}{k} - \alpha_{r,n}\right)^{2s}\right] = \frac{1}{k^{2s}} \cdot E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\left[(X^i)^r - \alpha_{r,n}\right]\right)^{2s}\right]. \tag{3.4}$$

Uogólniony wzór Newtona prowadzi więc do postaci:

$$E\left[(a_{r,n} - \alpha_{r,n})^{2s}\right] = \frac{1}{k^{2s}} \cdot \sum_{\substack{s_1,\dots,s_k=0 \\ s_1+\dots+s_k=2s}}^{2s} \frac{(2s)!}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_k!} E\left[\prod_{i=1}^{k}\left((X^i)^r - \alpha_{r,n}\right)^{s_i}\right].$$

Z uwagi na fakt, że $X^1 : \Omega \to R^n, \dots, X^k : \Omega \to R^n$ to próba losowa prosta prawdziwa jest równość:

$$E\left[(a_{r,n} - \alpha_{r,n})^{2s}\right] = \frac{1}{k^{2s}} \cdot \sum_{\substack{s_1,\dots,s_k=0 \\ s_1+\dots+s_k=2s}}^{2s} \frac{(2s)!}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_k!} \prod_{i=1}^{k} E\left[(X^r - \alpha_{r,n})^{s_i}\right], \tag{3.5}$$

gdzie $X : \Omega \to R^n$ to wektor losowy o rozkładzie identycznym z rozkładem wektorów losowych $X^1 : \Omega \to R^n, \dots, X^k : \Omega \to R^n$.

Zauważmy że, dla każdego $k \ge s$, spośród wszystkich wielowskaźników $(s_1 \ldots, s_k)$ spełniających warunek $\sum_{i=1}^{k} s_i = 2s$, gdzie $s_i \in \{0, \ldots, 2s\}$, największą liczbę niezerowych współrzędnych, przy założeniu, że nie zerują się odpowiadające tym wielowskaźnikom składniki sumy (3.5), posiadają te, dla których na s-pozycjach występuje liczba 2, natomiast pozostałe współrzędne są równe 0. Oznaczmy zbiór takich wielowskaźników przez Φ. Ustalając ilość elementów tego zbioru wybieramy zatem s-wskaźników ze zbioru k elementowego. Obliczając ilość elementów dowolnego, różnego od Φ, podzbioru wielowskaźników dokonujemy wyboru z mniejszego zbioru tzn. zbioru k-l elementowego, gdzie $l \in \{1, \ldots, k-1\}$. Wobec tego w powyższej sumie (3.5) otrzymujemy $\binom{k}{s} = \frac{k(k-1)\cdot \ldots (k-(s-1))}{s!}$ składników postaci $\frac{(2s)!}{2^s}\left(E\left[\left(X^r - \alpha_{r,n}\right)^2\right]\right)^s$, a zatem możemy ją przedstawić jako

$$E\left[\left(a_{r,n} - \alpha_{r,n}\right)^{2s}\right] = \frac{1}{k^{2s}} \cdot \frac{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-(s-1))}{s!} \cdot \frac{(2s)!}{2^s}\left(E\left[\left(X^r - \alpha_{r,n}\right)^2\right]\right)^s + $$
$$+ \frac{1}{k^{2s}} \cdot \sum_{\substack{s_1, \ldots, s_k = 0 \\ s_1 + \ldots + s_k = 2s \\ (s_1, \ldots, s_k) \notin \Phi}}^{2s} \frac{(2s)!}{s_1! \cdot \ldots \cdot s_k!} \prod_{i=1}^{k} E\left[\left(X^r - \alpha_{r,n}\right)^{s_i}\right].$$

Dzięki temu dla $k \ge s$ uzyskujemy oszacowanie

$$E\left[\left(a_{r,n} - \alpha_{r,n}\right)^{2s}\right] \le \frac{1}{k^{2s}} \cdot \frac{k^s}{s!} \cdot \frac{(2s)!}{2^s}\left(\mu_{r,n}(X)\right)^s + \frac{1}{k^{2s}} \cdot k^s \cdot A,$$

gdzie $A \in R$.
Ostatecznie więc

$$E\left[\left(a_{r,n} - \alpha_{r,n}\right)^{2s}\right] \le \left(\frac{(2s)!}{2^s s!}\left(\mu_{r,n}(X)\right)^s + A\right) \cdot k^{-s},$$

co należało udowodnić.
Załóżmy teraz, że r jest liczbą nieparzystą. Wobec tego $a_{r,n}$ to wektor losowy n-wymiarowy, natomiast $\alpha_{r,n} \in R^n$. Równość (3.4) przyjmuje w tym przypadku postać

$$E\left[\left(a_{r,n} - \alpha_{r,n}\right)^{2s}\right] = \frac{1}{k^{2s}} \cdot E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j - \left(\alpha_r\right)_j\right]\right)^2\right)^s\right].$$

Po zastosowaniu uogólnienia wzoru Newtona uzyskujemy

$$E\left[\left(a_{r,n}-\alpha_{r,n}\right)^{2s}\right]=\frac{1}{k^{2s}}\sum_{\substack{p_1,\dots p_{n=0}\\ p_1+\dots+p_n=s}}^{s}\frac{(s)!}{p_1!\cdot\ldots\cdot p_n!}E\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j-\left(\alpha_r\right)_j\right]\right)^2\right)^{p_j}\right]. \quad (3.6)$$

Zauważmy, że nierówność (3.2) prowadzi do oszacowania

$$E\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j-\left(\alpha_r\right)_j\right]\right)^2\right)^{p_j}\right]\le\prod_{j=1}^{n}\left(E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j-\left(\alpha_r\right)_j\right]\right)^{2s}\right]\right)^{\frac{p_j}{s}}. \quad (3.7)$$

Rozumowanie analogiczne do przedstawionego w przypadku gdy r to liczba parzysta, implikuje postać

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j-\left(\alpha_{r,n}\right)_j\right]\right)^{2s}\right]=\sum_{\substack{s_1,\dots,s_k=0\\ s_1+\dots+s_k=2s}}^{2s}\frac{(2s)!}{s_1!\cdot\ldots\cdot s_k!}E\left[\prod_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j-\left(\alpha_{r,n}\right)_j\right]^{s_i}\right]=$$

$$=\frac{k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-(s-1))}{s!}\cdot\frac{(2s)!}{2^s}\left(E\left[\left(\left(X^r\right)_j-\left(\alpha_{r,n}\right)_j\right)^2\right]\right)^s+$$

$$+\sum_{\substack{s_1,\dots,s_k=0\\ s_1+\dots+s_k=2s\\ (s_1,\dots,s_k)\notin\Phi}}^{2s}\frac{(2s)!}{s_1!\cdot\ldots\cdot s_k!}\prod_{i=1}^{k}E\left[\left(\left(X^r\right)_j-\left(\alpha_{r,n}\right)_j\right)^{s_i}\right],$$

dla wszystkich $k\ge s$ oraz $j\in\{1,\dots,n\}$, gdzie, podobnie jak poprzednio, $X:\Omega\to R^n$ to wektor losowy o rozkładzie identycznym z rozkładem wektorów losowych $X^1,\dots,X^k$.
Dzięki temu, dla każdego $k\ge s$ oraz $j\in\{1,\dots,n\}$, prawdziwa jest nierówność

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^i\right)^r\right)_j-\left(\alpha_{r,n}\right)_j\right]\right)^{2s}\right]\le k^s\cdot\frac{(2s)!}{2^s s!}\left(E\left[\left(\left(X^r\right)_j-\left(\alpha_{r,n}\right)_j\right)^2\right]\right)^s+k^s\cdot A_j=$$

$$=k^s\cdot\left(\frac{(2s)!}{2^s s!}\left(\left(\mu_{r,n}(X)\right)_j\right)^2+A_j\right),$$

gdzie $A_j\in R$.

Wracając do nierówności (3.7) uzyskujemy

$$E\left[\prod_{j=1}^{n}\left(\left(\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\left(X^{i}\right)^{r}\right)_{j}-\left(\alpha_{r,n}\right)_{j}\right]\right)^{2}\right)^{p_j}\right]\leq k^{s}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(2s)!}{2^{s}s!}\left(\left(\mu_{r,n}(X)\right)_{j}\right)^{2}+A_{j}\right)^{\frac{p_j}{s}} .$$

Ostatecznie więc, że dla wszystkich $k \geq s$, otrzymujemy oszacowanie

$$E\left[\left(a_{r,n}-\alpha_{r,n}\right)^{2s}\right]\leq\frac{1}{k^{2s}}\sum_{\substack{p_1,\dots p_n=0\\ p_1+\dots+p_n=s}}^{s}\frac{(s)!}{p_1!\cdot\ldots\cdot p_n!}\cdot k^{s}\cdot\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(2s)!}{2^{s}s!}\left(\left(\mu_{r,n}(X)\right)_{j}\right)^{2}+A_{j}\right)^{\frac{p_j}{s}}=$$

$$=k^{-s}\cdot\left(\sum_{\substack{p_1,\dots p_n=0\\ p_1+\dots+p_n=s}}^{s}\frac{(s)!}{p_1!\cdot\ldots\cdot p_n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\frac{(2s)!}{2^{s}}\left(\left(\mu_{r,n}(X)\right)_{j}\right)^{2}+A_{j}\right)^{\frac{p_j}{s}-s}\right),$$

co należało wykazać.

Zauważmy, że uzyskane rzędy przybliżeń momentów centralnych parzystych rzędów dla estymatorów momentów zwykłych są takie same jak w przypadku jednowymiarowym (por. Cramer (1958), s. 333).

UWAGI KOŃCOWE

W artykule przedstawione zostały zgodne i nieobciążone estymatory momentów zwykłych wektora losowego opartych na definicji potęgi wektora. Wyznaczono podstawowe charakterystyki rozkładów tych estymatorów, takie jak wektor wartości oczekiwanych, wariancja lub wariancja całkowita. Obliczono także postaci kowariancji lub macierzy kowariancji miedzy odpowiednimi momentami w próbie wielowymiarowej. Ponadto ustalone zostało asymptotyczne tempo wzrostu ich momentów centralnych parzystych rzędów.

Prezentowane wyniki stanowią część pracy doktorskiej Autorki — Budny (2014a). W rozprawie tej ponadto uzupełniono zestaw charakterystyk opartych na definicji potęgi wektora o kolejne, tj. kurtozę — por. Budny (2009), Budny i Tatar (2009), Budny (2012a, 2012b) oraz współczynnik ekscesu — por. Budny (2014d), a także zaproponowano miernik zależności liniowej między wektorami losowymi o dowolnych wymiarach, nazwany współczynnikiem korelacji wielowymiarowej. W rozprawie doktorskiej zwrócono również uwagę na problem wielowymiarowego uogólnienia nierówności Czebyszewa; por. Budny (2014b, 2014c). Ponadto, aby umożliwić zastosowanie charakterystyk opartych na potędze wektora (także współczynnika korelacji wielowymiarowej) w analizie danych wielowymiarowych, skonstruowano co najmniej zgodne estymatory nowych charakterystyk wektorów losowych i nowego miernika ich liniowej zależności. Wskazano także dwa przykłady zastosowań. Pierwszy z nich dotyczy zagadnień z zakresu finansów przedsiębiorstw, gdzie badaniu poddano dwie kategorie finansowe, tj. zadłużenie i rentowność. W drugim rozważano zachowanie konsumentów w zakresie wyboru form płatności.

BIBLIOGRAFIA

Billingsley P. (2009), *Prawdopodobieństwo i miara*, Wyd. 2, PWN, Warszawa.

Bilodeau M., Brenner D. (1999), *Theory of Multivariate Statistics*, Springer-Verlag, New York.

Budny K. (2009), *Kurtoza wektora losowego*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, 78, seria: Ekonometria, 26, 44–54.

Budny K., Tatar J. (2009), *Kurtosis of a random vector — special types of distributions*, Statistics in Transiton — new series, 10(3), 445–456.

Budny K. (2012a), *Kurtoza wektora losowego o wielowymiarowym rozkładzie normalnym*, w: *Zastosowanie metod ilościowych w finansach i ubezpieczeniach* (red. S. Forlicz), CeDeWu, Warszawa, 41–54.

Budny K. (2012b), *Wybrane własności kurtozy wektora losowego*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, seria: Metody analizy danych (w druku).

Budny K. (2014a), *Nowe charakterystyki rozkładu i zależności wektora losowego — konstrukcja, estymacja, zastosowania*, niepublikowana rozprawa doktorska, Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie.

Budny K. (2014b), *A generalization of Chebyshev's inequality for Hilbert-space-valued random elements*, Statistics & Probability Letters, 88, 62–65.

Budny K. (2014c), *An extension of the multivariate Chebyshev's inequality to a random vector with a singular covariance matrix*, Communications in Statistics — Theory and Methods (w druku).

Budny K. (2014d), *Współczynnik ekscesu wektora losowego*, Studia Ekonomiczne, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach (w druku).

Cramer H. (1958), *Metody matematyczne w statystyce*, Wyd. 1, PWN, Warszawa.

Genton M.G., He L., Liu X. (2001), *Moments of skew — normal random vectors and their quadratic forms*, Statistics & Probability Letters, 51, 319–325.

Holmquist B. (1988), *Moments and cumulants of the multivariate normal distribution*, Stochastic Analysis and Applications, 6, 273–278.

Jakubowski J., Sztencel R. (2004), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, wyd. 3, Script, Warszawa.

Johnson N.J., Kotz S., Kemp A.W. (1992), *Univariate discrete distributions: Volume 1: Models and applications*, 2nd ed. John Wiley & Sons, Inc.

Kim H., Mallick B.K. (2003), *Moments of random vectors with skew t distribution and their quadratic forms*, Statistics & Probability Letters, 63, 417–423.

Osiewalski J., Tatar J. (1999), *Multivariate Chebyshev inequality based on a new definition of moments of a random vector*, Przegląd Statystyczny, 46 (2), 257–260.

Shao J. (2003), *Mathematical statistics*, 2nd ed. Springer.

Tatar J. (1996), *O niektórych miarach rozproszenia rozkładów prawdopodobieństwa*, Przegląd Statystyczny, 43 (3–4), 267–274.

Tatar J. (1999), *Moments of a random variable in a Hilbert space*, Przegląd Statystyczny, 46 (2), 261–271.

Tatar J. (2000), *Momenty absolutne wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Komisja Statystyczno-Demograficzna PAN, O/Kraków, 17 listopada 2000 r.

Tatar J. (2002), N*ierówność Lapunowa dla wielowymiarowych rozkładów prawdopodobieństwa*, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, 549, 5–10.

Tatar J. (2003), *Prawa wielkich liczb dla wielowymiarowych wektorów losowych. Zastosowania statystyki i matematyki w ekonomii*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, 1006, 254–260.