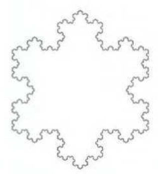
Fraktale w holomorficznej dynamice

Zbiory Julii

FELIKS PRZYTYCKI
Instytut Matematyczny, Warszawa
Polska Akademia Nauk
feliksp@impan.gov.pl



W 1904 roku szwedzki matematyk Helge von Koch opisał niezwykłą figurę geometryczną o „samopodobnym" brzegu, którą nazwał „płatkiem śniegu". Dziś takie „samopodobne", ale „niegładkie" zbiory nazywane fraktalami, znane z niezwykłej urody, są obiektem intensywnych badań naukowych

Zachwycony wewnętrzną nieskończonością krzywej von Kocha włoski matematyk Ernesto Cesàro napisał o niej: „Gdyby była obdarzona życiem, można by się jej pozbyć, tylko niszcząc ją w całości. Inaczej odżywałaby znowu i znowu z głębi swoich trójkątów, jak to czyni życie we Wszechświecie".

Powszechność takich figur w matematyce i przyrodzie zauważył Benoit Mandelbrot, mając już do dyspozycji komputer. To on nazwał je fraktalami. Ich wymiar geometryczny jest większy niż topologiczny (wymiar topologiczny krzywej jest równy 1, powierzchni 2 itd.) i nie musi być liczbą całkowitą.

Cechą wielu fraktali jest samopodobieństwo: fraktal w dowolnie małym otoczeniu każdego jego punktu jest podobny do całego fraktala (lub jego dużej części). Taka własność fraktali sprawia, że znajdują one zastosowania również w dziedzinach odległych od matematyki: w grafice komputerowej do tworzenia wiarygodnych krajobrazów i kompresji danych, do badań struktury całego Wszechświata, a nawet przewidywania kursu akcji na giełdzie.

Samopodobieństwo fraktali często wynika z tego, że istnieje lokalnie rozciągające przekształcenie f fraktala w siebie takie, że iteracje (powtórzenia) f przekształcają małe zbiory na duże, deformując kształty tylko w sposób ograniczony (mówimy wtedy o ograniczonej dystorsji). Oczywiście im mniejsza skala (mniejszy zbiór), tym dłuższy czas (iteracja) dla dojścia do dużej skali jest potrzebny. I tak okazuje się, że własności przestrzeni w mikroskali są związane z zachowaniem trajektorii przekształcenia po długim czasie.

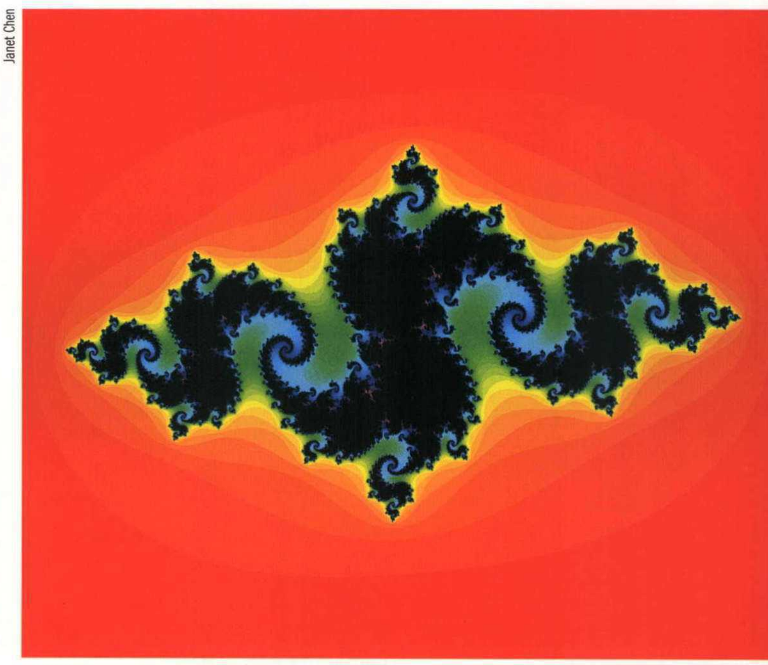
W poszukiwaniu stabilności

W tym miejscu analiza i geometria fraktali spotyka się z teorią układów dynamicznych. Układy dynamiczne opisują zachowanie się trajektorii punktów przy iterowaniu przekształcenia lub trajektorii rozwiązań równań różniczkowych opisujących procesy fizyczne w długim czasie. Dotyczą stabilności układu i zbiorów niezmienniczych. Początki tej dziedziny matematyki związane są z mechaniką niebieską. Jak zachowuje się układ dwóch ciał, wiedzieli już Kepler i Newton. Jednak układ trzech ciał (Słońce, Jowisz, Ziemia) nadal nie jest matematycznie dokładnie zrozumiany. Na ogół w sytuacjach pochodzących z mechaniki przestrzeń rozpada się na zbiory niezmiennicze, w których ruch jest prawie okresowy i zbiory, w których ruch jest „chaotyczny". Te ostatnie zostały zrozumiane dopiero w ostatnich dziesięcioleciach: okazało się, że taki ruch można opisać najprostszymi procesami stochastycznymi, stąd powiedzenie: „deterministyczny chaos". W sytuacjach gdzie miara (i energia) nie musi być zachowana, istnieją też obszary przyciągane do trajektorii okresowych, atraktory bardziej skomplikowane niż pojedyncze trajektorie, repellery itp.

Dynamika populacji

Najprostszym przekształceniem, które można iterować, otrzymując ciekawe zjawiska, jest wielomian kwadratowy $x \mapsto ax\,(1 - x)$, z dodatnim współczynnikiem a nie więk-

Janet Chen



Wypełniony zbiór Julii, $c = -0{,}8 - 0{,}15\,i$

szym niż 4. Dynamika takiego przekształcenia daje najprostszy model zachowania populacji np. jakiegoś gatunku zwierząt. Jeśli x jest małe, to w następnych generacjach rośnie (o ile współczynnik a jest większy niż 1) - liczebność danego gatunku rośnie. Jeśli x jest bliskie 1, to w następnej generacji jest małe - zbyt gęsto zasiedlające teren zwierzęta giną. Trajektoria typowego punktu (liczebności populacji) może w zależności od a zbliżać się do trajektorii (orbity) okresowej lub zachowywać się chaotycznie. Wtedy jednak dla prawie wszystkich parametrów a trajektoria prawie każdego punktu x zachowuje się „tak samo" - po długim czasie cały odcinek $[0, 1]$ (lub pewna skończona liczba jego pododcinków) jest „pokryta" trajektorią, a „gęstość" tego pokrycia nie zależy od x! Ta własność nazywa się ergodycznością „stanu równowagi".

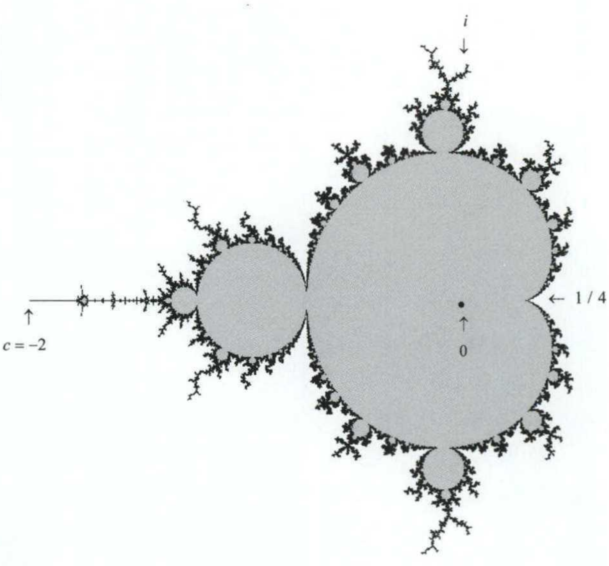
Julia i Mandelbrot

W latach 80. zająłem się iteracjami funkcji przekształceń holomorficznych na płaszczyźnie. To są przekształcenia, których iteracje (poza pewnymi punktami osobliwymi) mają ograniczoną dystorsję i rozciągają, implikują więc samopodobieństwo.

Żeby zrozumieć iteracje $ax(1 - x)$, należy czasem badać iteracje $z \mapsto az(1 - z)$ lub, po odpowiedniej zmianie współrzędnych, $z \mapsto z^2 - c$. Tutaj z jest punktem płaszczyzny, traktowanym jako liczba zespolona. A funkcja holomorficzna to po prostu wielomian kwadratowy. Geometrycznie liczby zespolone dodaje się tak jak wektory łączące 0 z tymi liczbami, a mnoży się, mnożąc długości tych wektorów i ustawiając powstały wektor pod kątem (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) względem dodatniej półosi (tzw. argumentem) będącym sumą argumentów tych wektorów. Przy dowolnie ustalonej liczbie zespolonej c, jeśli punkt z jest dostatecznie daleko od 0, jego trajektoria przy iterowaniu przekształcenia f_c ucieka do nieskończoności. Mówimy, że z jest w basenie przyciągania nieskończoności. Ten basen ma brzeg, nazywany zbiorem Julii od nazwiska Gastona Julia, który na początku XX w., niezależnie od drugiego odkrywcy Pierre'a Fatou, zdefiniował go dla f_c i pewnych szerszych klas funkcji.

Zbiór Julii jest „chaotycznym repellerem". Proszę zauważyć, że dla f_0 zbiór Julii $J(f_0)$ to okrąg o środku w 0 i promieniu 1. Dla f_c gdy $c \neq 0$, ale jest blisko 0, zbiór Julii jest krzywą zamkniętą blisko okręgu o promieniu 1, będącą jednak fraktalem. Kiedy c oddala się od 0, przekraczając krzywą zwaną kardioidą, następują samozlepienia tej krzywej. Zbiór Julii może przypominać brzeg „smoka". Gdy c opuszcza pewien zbiór zwany zbiorem Mandelbrota, zbiór Julii się rozsypuje.

Dla wielu c zbiór Julii dla f_c jest sumą obrośniętych kolcami w płaszczyźnie odcinków z prostej rzeczywistej. Większość tego „krzaka" („jeża") jest samopodobna, ale nie „dokładnie" z uwagi na punkt osobliwy 0 w zbiorze Julii. Ja zajmuję się badaniem własności statystycz-



Zbiór Mandelbrota

nych takich „niejednostajnie rozciągających" przekształceń f_c i ogólniej: funkcji wymiernych (ilorazu wielomianów zmiennej zespolonej) oraz dokładniejszym opisem lokalnej geometrii.

Można też iterować przekształcenie $z \mapsto ae^z$, gdzie dla $z = (x, y)$ (punktu płaszczyzny o współrzędnych x, y) $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, a i to pierwiastek kwadratowy z liczby -1. Zbiór Julii przekształcenia ae^z składa się z nieskończonej liczby (tzw. zbioru Cantora) poklejonych w kosmyki „włosów". To tzw. bukiet Cantora. B. Karpińska w znakomitym doktoracie napisanym pod moją opieką udowodniła, że wymiar geometryczny Hausdorffa zbioru końców tych włosów jest równy 2, a paradoksalnie wymiar całego bukietu bez końców (wymiar sumy tylko „łodyg") jest równy 1. To bukiet o „bardzo roztrzepanych kwiatach".

Zespół warszawski wraz z matematykami m.in. z USA, Wielkiej Brytanii, Francji i Chile prowadzi badania zbiorów Julii dla ogólnych funkcji analitycznych zespolonych jednej lub wielu zmiennych i związanych z dynamiką fraktali. Część badań prowadzona jest w ramach europejskiej sieci Marie Curie Research Training Network „Conformal Structures and Dynamics" i programu Marie Curie Transfer of Knowledge „Deterministic and Stochastic Dynamics, Fractals, Turbulence" w IMPAN. ■

Chcesz wiedzieć więcej?

Falconer K. (1990, 2003). *Fractal Geometry. Mathematical Foundations and Applications.* New York: J. Wiley.

Fomin S.W., Kornfeld I.P., Sinaj J.G. (1987). *Teoria Ergodyczna.* Warszawa: PWN.

Mandelbrot B. (1982). *The Fractal Geometry of Nature. New York.* New York: W.H. Freeman and Company.

Peitgen H.-O., Juergens H., Saupe D. (1992). *Granice Chaosu, Fraktale.* Cz. I. PWN.

Przytycki F. (1986). Zoo na płaszczyźnie. *Delta, 2 (146)*, 1-6.