

MARIAN BROŻEK\*, EWA ORUBA-BROŻEK\*\*

## Wpływ struktury ziaren mineralnych na ich właściwości wytrzymałościowe na przykładzie wapienia i porfiru

### Słowa kluczowe

Porfir, wapień, wytrzymałość na rozciąganie, rozkład Weibulla, mikroszczeliny wrodzone, stopień rozdrabniania

### Streszczenie

Teoretyczna wytrzymałość materiałów kruchych na rozciąganie jest  $10^2$ – $10^4$  razy większa od wytrzymałości rzeczywistej. Na wytrzymałość rzeczywistą, oprócz siły wiązań atomowych w idealnym kryształ, ma wpływ struktura ziarna. Jako podstawę przyjmuje się ziarno jednofazowe, ciągłe przestrzennie i jednorodne pod względem składu chemicznego. Wprowadzając w przestrzeń ziarna wrodzone mikroszczeliny i inne geometryczne i fizyczne wady wewnętrzne tworzy się ziarno rzeczywiste. Rozkład wielkości i liczba tych defektów, rzutujące na wytrzymałość ziarna, tworzą jego strukturę mechaniczną. Ponieważ zarówno liczba, jak i rozmiar wrodzonych mikroszczelin są zmiennymi losowymi, w związku z tym wytrzymałość ziarna na rozciąganie jest zmienną losową opisywaną rozkładem Weibulla.

W pracy przeanalizowano wpływ struktury ziarna na jego wytrzymałość na rozciąganie z punktu widzenia teorii najsłabszego ogniwa oraz statystycznej teorii pęknięcia. W obu przypadkach na rozkład wytrzymałości ziarna uzyskuje się rozkład Weibulla, którego parametry są związane z rozkładem długości mikroszczelin (wzory 5 i 15).

W dalszej części przedstawiono wyniki badań empirycznych wytrzymałości na rozciąganie ziaren wapienia i porfiru. Wyznaczono dystrybuanty rozkładu wytrzymałości (wzory 20–22 oraz rysunki 3–5) oraz wyliczono moduły Weibulla badanych próbek i średnią wytrzymałość ziarna. Średnia wytrzymałość ziarna na rozciąganie jest związana z wielkością ziarna jednym z wzorów (25) w zależności od tego, czy pęknięcie ziarna jest następstwem pobudzenia mikroszczelin objętościowych, powierzchniowych czy krawędziowych. W przypadku wapienia (surowca jednoskładnikowego) pęknięcie ziarna jest spowodowane przez mikroszczeliny krawędziowe (wzór 27a), natomiast w przypadku porfiru (surowca wieloskładnikowego) przez mikroszczeliny powierzchniowe (wzór 27b).

Zależność stopnia rozdrabniania od wytrzymałości ziarna jest opisywana rosnącą funkcją potęgową (wzory 29–32). Wykładnik potęgi w tej zależności jest skorelowany z modułem Weibulla (wzór 33).

Przedstawione wyniki dotyczą dwóch surowców. To czy uzyskane wyniki mają charakter powszechny, odnoszący się do wszystkich surowców — rozstrzygną dalsze badania.

\* Dr hab., prof. AGH, \*\* dr inż., Wydział Górnictwa i Geoinżynierii AGH, Kraków.

## Wprowadzenie

Pod pojęciem „struktura ziarna” rozumie się budowę wewnętrzną ziarna, którego elementy substancji skalnej wraz ze wszystkimi wadami i wtrąceniami tworzą ziarno rzeczywiste. Jako podstawę przyjmuje się ziarno jednofazowe, ciągłe przestrzennie i jednorodne pod względem składu chemicznego. Wprowadzając w przestrzeń ziarna mikroszczeliny i inne geometryczne wady wewnętrzne tworzy się ziarno rzeczywiste. Rozkład i liczba tych defektów, rzutujące na wytrzymałość ziarna, tworzą strukturę mechaniczną ziarna.

Teoretyczna wytrzymałość ciał stałych na rozciąganie jest uwarunkowana ich budową krystaliczną i można ją wyrazić następującym wzorem (Cottrell 1964):

$$\sigma = \sqrt{\frac{\gamma E}{c}} \quad (1)$$

gdzie:

- E — moduł Younga,
- $\gamma$  — swobodna powierzchniowa energia właściwa,
- c — stała translacyjna sieci krystalicznej.

Doświadczenie pokazuje, że rzeczywista wytrzymałość ciał stałych na rozciąganie jest  $10^2$ — $10^4$  razy mniejsza od wytrzymałości teoretycznej wynikającej z rozerwania wiązań atomowych w idealnym kryształ.

Dla wyjaśnienia tej rozbieżności Griffith założył, że w ciałach stałych, nawet tych najbardziej jednorodnych — takich jak np. szkło, występują małe mikropęknięcia (Griffith 1921). Zgodnie z tą hipotezą i statystyczną teorią wytrzymałości (Freudenthal 1968) właściwości wytrzymałościowe ziaren mineralnych są zależne od obecności wrodzonych defektów struktury wewnętrznej ciała. Defekty te można uznać za geometryczne nieciągłości struktury, które obniżają wytrzymałość ziarna. Zaliczyć do nich można wszelkiego rodzaju mikropęknięcia, draśnięcia na powierzchni, pory i mikropory, wady i niejednorodności struktury (dyslokacje, wakansje). Rozkład i charakter tych nieciągłości ma wpływ na wytrzymałość ziarna.

Pękanie ziarna spowodowane jest przez naprężenia rozciągające skoncentrowane na końcach mikroszczelin. W rozdrabnianiu, przy danym naprężeniu rozciągającym biorą udział jedynie te szczeliny, których długość może się powiększyć do rozmiarów makroskopowych.

Według Griffitha wytrzymałość na rozciąganie ciała stałego osłabionego soczewkowatą szczeliną o długości  $2a$  jest równa:

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi a}} = \frac{k}{\sqrt{a}} \quad (2)$$

gdzie:  $k = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi}}$

Przy naprężeniach większych od  $\sigma$  następuje rozwarcie mikroszczeliny i powstaje mikro-  
pęknięcie, które wydłuża się aż do granic ciała lub do napotkania innej szczeliny.

Weibull (1951) wytrzymałość na rozciąganie próbek tego samego materiału o identycznych  
wymiarach uznał za zmienną losową i uzyskał doświadczalnie dla rozkładu tej zmiennej  
wyrażenie:

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[ -V \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right] \quad (3)$$

gdzie:

- V — objętość próbki poddanej rozciąganiu,
- $\sigma_0$  i m — parametry rozkładu, przy czym  $\sigma_0$  jest wartością modalną funkcji gęstości  
rozkładu  $f(\sigma)$ , natomiast parametr m nosi nazwę modułu Weibulla. Oba para-  
metry są stałymi materiałowymi charakterystycznymi dla danego materiału.

Losowy charakter wytrzymałości wynika z obecności mikroszczelin i wad, których liczba  
i wielkość są zmiennymi losowymi.

Gillvarry założył, że pękanie ziarna następuje na skutek pobudzania szczelin i defektów  
objętościowych, powierzchniowych i krawędziowych (Gillvarry 1961). Liczba tych szczelin  
w ziarnie jest zmienną losową, lecz średnia liczba szczelin uaktywnionych w trakcie kruszenia,  
w wyniku którego powstaje dane ziarno jest proporcjonalna odpowiednio do objętości, po-  
wierzchni i średnicy ziarna. Ponadto szczeliny poszczególnych typów są rozłożone losowo  
względem kierunku przyłożonego naprężenia a ich rozkłady przestrzenne są niezależne.

Ze statystycznej teorii wytrzymałości wynika, że rozkład wytrzymałości jest związany  
z rozkładem liczby szczelin (defektów) w ziarnach. Według hipotezy najslabszego ogniwa na  
rozkład wytrzymałości ziaren wpływa rozkład wielkości szczelin, natomiast z analizy prze-  
prowadzonej przez Trustruma i Jayatilakę widać, że na rozkład wytrzymałości ziaren rzu-  
tuje zarówno rozkład wielkości szczelin, jak i ich liczba. We wszystkich przypadkach śred-  
nia wytrzymałość ziaren jest zależna od wielkości ziarna. Jak będzie pokazane w tym arty-  
kule, na szczegółową postać tej zależności ma wpływ typ szczelin wyspecyfikowanych przez  
Gilvary'ego, natomiast zależność stopnia rozdrabniania od wytrzymałości na rozciąganie jest  
związana z modułem Weibulla.

## 1. Rozkład wytrzymałości na rozciąganie ziaren mineralnych

Jak wynika ze wzoru Griffitha, wytrzymałość na rozciąganie ciała osłabionego szczeliną jest  
tym mniejsza, im większa jest długość szczeliny. W myśl koncepcji najslabszego ogniwa  
(Freudenthal 1968) wytrzymałość ciała (ziarna) jest uwarunkowana wytrzymałością elementu  
objętości ziarna o najmniejszej wytrzymałości (wytrzymałości lokalnej). Rozkład wytrzy-  
małości w całej próbce ziaren o tej samej objętości jest rozkładem najmniejszych wytrzymałości  
lokalnych, która zgodnie ze wzorem Griffitha jest w korelacji z rozkładem największych  
szczelin w elementach objętości próbki (ziarnach).

Funkcja gęstości rozkładu największych szczelin oraz dystrybuanta tego rozkładu zostały wyznaczone przez Frecheta i wyrażają się następującymi wzorami (Frechet 1927):

$$f_a(a) = \frac{\lambda u^\lambda}{a^{\lambda+1}} \exp\left[-\left(\frac{u}{a}\right)^\lambda\right] \quad (4a)$$

$$F_a(a) = \exp\left[-\left(\frac{u}{a}\right)^\lambda\right] \quad (4b)$$

gdzie:

$u, \lambda$  — parametry rozkładu.

Stosownie do zależności (2) rozkład wytrzymałości lokalnej jest następujący:

$$F_\sigma(\sigma) = P(\Sigma \leq \sigma) = P\left(A \geq \frac{k^2}{\sigma^2}\right) = 1 - F_a\left(\frac{k^2}{\sigma^2}\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^{2\lambda}\right] \quad (5a)$$

$$f_\sigma(\sigma) = \frac{2\lambda}{\sigma_u^{2\lambda}} \sigma^{2\lambda-1} \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_u}\right)^{2\lambda}\right] \quad (5b)$$

gdzie:  $\sigma_u = \frac{k}{\sqrt{u}}$

Rozkład wytrzymałości lokalnej jest więc rozkładem Weibulla o parametrach  $\sigma_u$  i  $2\lambda$ .

Wariancja wytrzymałości lokalnej jest równa:

$$\text{Var}(\sigma) = \sigma_u \left[ \Gamma\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{2\lambda}\right) \right]^{1/2} \quad (6)$$

Ziarno o objętości  $V$  składa się z  $n$  lokalnych objętości  $V_o$ , czyli  $V = nV_o$ . Wtedy rozkład ogólnej wytrzymałości jest zależny od objętości ziarna i wyraża się wzorem:

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_V}\right)^{2\lambda}\right] \quad (7)$$

przy czym  $\sigma_V = \sigma_u \left(\frac{V_o}{V}\right)^{1/2\lambda}$  jest modalną wartością wytrzymałości ziarna o objętości  $V$ , uwzględniającą wpływ objętości ziarna na wytrzymałość.

Zgodnie ze wzorem (7) modalne wytrzymałości ziaren o objętościach odpowiednio  $V_1$  i  $V_2$  związane są następującą zależnością:

$$\frac{\sigma(V_1)}{\sigma(V_2)} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{1/2\lambda} \quad (8)$$

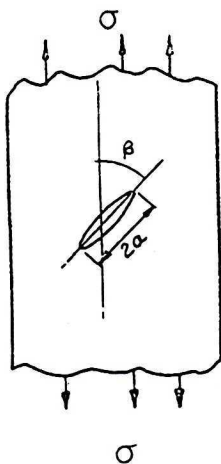
Wykładnik potęgi  $2\lambda$  jest miarą rozrzutu wielkości szczelin wokół wartości średniej. Im większa jest wartość  $\lambda$ , tym rozkład wielkości szczelin jest bardziej jednorodny. Dla jednorodnego rozkładu wielkości szczelin ( $\lambda \rightarrow \infty$ ), zgodnie ze wzorem (8), wytrzymałość ziarna nie zależy od objętości, a ponadto — jak wynika ze wzoru (6) — wariancja wytrzymałości ziaren na rozciąganie jest równa zero, czyli wszystkie ziarna w próbce mają tę samą wytrzymałość. Zatem w myśl koncepcji najsłabszego ogniwa, rozkład wytrzymałości ziaren jest związany z rozkładem wielkości szczelin, a nie ich liczbą.

Analizę wpływu rozkładu wielkości szczelin na dystrybuantę rozkładu wytrzymałości próbki przeprowadzili Trustrum i Jayatilaka (1977a, 1977b, 1979, 1983). Podali oni wyrażenie na prawdopodobieństwo zniszczenia próbki  $F_1(\sigma)$  pod wpływem naprężenia rozciągającego dla jednej szczeliny o długości  $2a$  (rys. 1):

$$F_1(\sigma) = \iint \frac{2}{\pi} f(a) da d\beta \quad (9)$$

gdzie  $\beta$  jest kątem nachylenia osi szczeliny  $2a$  do kierunku naprężeń natomiast  $f(a)$  gęstością prawdopodobieństwa występowania szczelin o długości  $2a$ .

Prawdopodobieństwo niezniszczenia próbki przy jednej szczelinie jest więc równe  $1 - F_1(\sigma)$ , natomiast prawdopodobieństwo niezniszczenia przy  $N$  szczelinach, zgodnie z regułą mno-



Rys. 1. Skośna mikroszczelina poddana jednolitemu naprężeniu rozciągającemu (Jayatilaka, Trustrum 1977)

Fig. 1. An inclined micro-crack under a uniform tensile strength

żenia prawdopodobieństw, będzie równe  $[1 - F_1(\sigma)]^N$ . Wobec tego prawdopodobieństwo zniszczenia próbki przy  $N$  szczelinach lub dystrybuanta rozkładu wytrzymałości wyrazi się wzorem:

$$F(\sigma) = 1 - [1 - F_1(\sigma)]^N \quad (10)$$

Dla dużej liczby szczelin  $[1 - F_1(\sigma)]^N \cong \exp[-NF_1(\sigma)]$ , w związku z czym dla dużych  $N$ , wyrażenie (10) przybiera postać:

$$F(\sigma) = 1 - \exp[-NF_1(\sigma)] \quad (11)$$

Szczegółowa postać rozkładu wytrzymałości jest zatem związana zarówno z liczbą szczelin w próbce  $N$ , jak i rozkładem wielkości szczelin  $f(a)$  poprzez zależność (9).

Dla rozkładu wielkości szczelin (rys. 2):

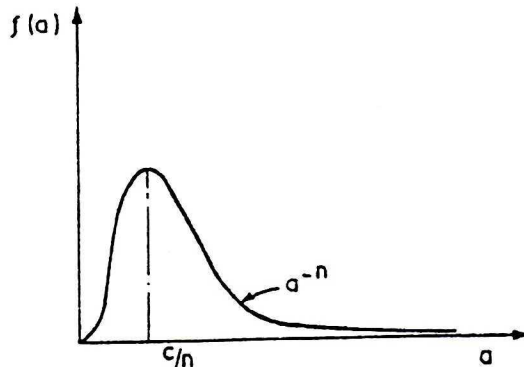
$$f(a) = \frac{c^{n-1}}{(n-2)!} a^{-n} \exp\left(-\frac{c}{a}\right) \quad (12)$$

funkcja rozkładu wytrzymałości jest następująca (Jayatilaka, Trustrum 1977a):

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-N \frac{c^{n-1}}{n!} \left(\frac{\pi}{K_c^2}\right)^{n-1} \sigma^{2(n-1)}\right] \quad (13)$$

W powyższych wzorach  $c$  i  $n$  przedstawiają parametry rozkładu, natomiast  $K_c$  jest współczynnikiem intensywności naprężenia.

Przyjmując następujące oznaczenie:



Rys. 2. Gęstość rozkładu wielkości mikroszczelin (Jayatilaka, Trustrum 1977)

Fig. 2. Probability density function of micro-crack size

$$\sigma_0 = \left[ \frac{\left( \frac{n!}{\mu} \right)^{\frac{1}{2n-2}} K_c}{\sqrt{\pi c}} \right]^{2n-2} \quad (14)$$

oraz zakładając, że liczba szczelin w próbce (ziarnie) jest proporcjonalna do jej objętości, czyli  $N = \mu V$ , gdzie  $\mu$  jest liczbą szczelin na jednostkę objętości, wzór (13) można zapisać w następującej formie:

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[ -V \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{2n-2} \right] \quad (15)$$

Uzyskuje się więc wyrażenie analogiczne do wzoru (3), przy czym moduł Weibulla jest równy  $m = 2n - 2$ , a  $\sigma_0$  jest wyrażone wzorem (14).

Stałe materiałowe, którymi są moduł Weibulla oraz modalna wartość naprężenia  $\sigma_0$ , są zatem związane z parametrami rozkładu wielkości szczelin oraz liczbą szczelin na jednostkę objętości próbki (ziarna).

Wartość średnia wytrzymałości ziarna jest dla rozkładu (15) równa:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0}{V^{1/m}} \Gamma \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \quad (16)$$

skąd

$$\sigma_0 = \frac{\bar{\sigma} V^{1/m}}{\Gamma \left( \frac{1}{m} + 1 \right)} \quad (17)$$

Czyli średnia wytrzymałość ziarna maleje ze wzrostem objętości. Wprowadzając do wzoru (15) za  $\sigma_0$  ze wzoru (17) otrzymuje się alternatywną postać dystrybuanty rozkładu wytrzymałości ziarna:

$$F(\sigma) = 1 - \exp \left[ -\Gamma^m \left( \frac{1}{m} + 1 \right) \left( \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \right)^m \right] \quad (18)$$

Trustum i Jayatilaka (1983) przeanalizowali również wpływ typu rozkładu długości szczelin na kształt funkcji  $F(\sigma)$ . Analizowali rozkłady potęgowy, log-normalny, exponencjalny, gamma, normalny i stwierdzili, że typ rozkładu długości szczelin nie ma w zasadzie wpływu na rozkład wytrzymałości materiału. Natomiast stosunek średnich wytrzymałości dwóch różnych

zbiorów tego samego materiału, różniących się objętościami, jak również moduł Weibulla są zależne od typu rozkładu długości szczelin.

## 2. Eksperyment

Badania wykonano na próbkach wapienia z Czatkowic i porfiru z Zalasu. Rozkład wytrzymałości ziaren na rozciąganie określono na ziarnach nieregularnych. W tym celu wydzielono na sitach po kilkaset ziaren w kilku wąskich klasach ziarnowych. Dla wapienia były to klasy 20—25, 25—30, 30—40, 40—50, 50—60, 60—80, 80—100 oraz 100—120 mm, natomiast dla porfiru 25—30, 40—50 oraz 60—80 mm. Z próbek wyeliminowano ziarna płaskie oraz ziarna wydłużone. Każde ziarno w danej klasie poddawano próbie zgniatania w prasie aż do momentu pęknięcia, rejestrując wartość siły niszczącej. Fragmenty ziarna uzyskane z próby zgniatania gromadzono oddzielnie dla każdego ziarna. Przedział siły niszczącej ( $0, P_{\max}$ ) podzielono na kilka lub kilkanaście klas (podprzedziałów) siły niszczącej. Produkt kruszenia z poszczególnych klas siły poddano analizie sitowej. Uzyskane wyniki umożliwiły wyznaczenie rozkładu wytrzymałości ziaren na rozciąganie, wyliczenie średniej wytrzymałości na rozciąganie ziaren w danej klasie siły niszczącej, średniej wytrzymałości ziaren w klasie ziarnowej oraz stopnia rozdrabniania dla danej klasy siły niszczącej.

## 3. Analiza wyników

### 3.1. Rozkład wytrzymałości

Wytrzymałość doraźną na rozciąganie nieregularnych ziaren wapienia i porfiru wyliczono z następujących wzorów (Brożek 1996):  
dla wapienia

$$\sigma = 0,74 \frac{P}{D^2} \quad (19a)$$

dla porfiru

$$\sigma = 0,71 \frac{P}{D^2} \quad (19b)$$

gdzie:

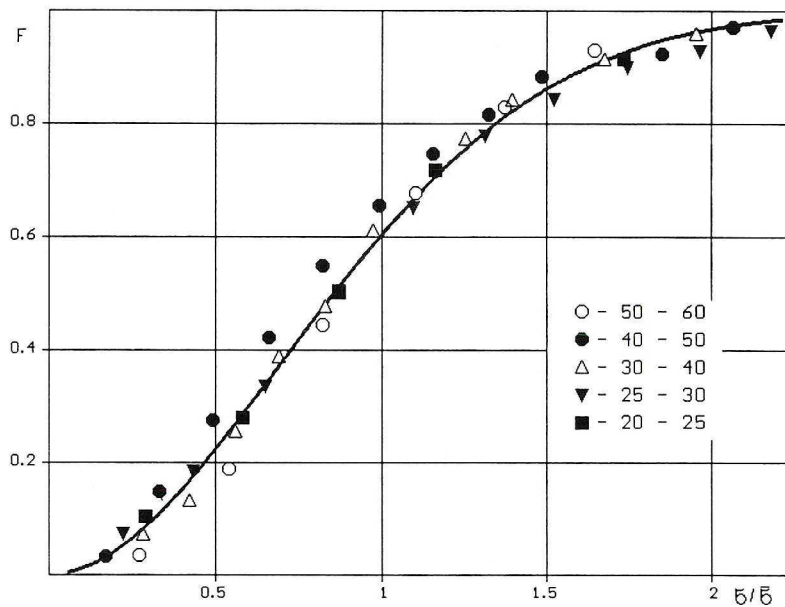
P — maksymalna wartość siły niszczącej w danej klasie siły,

D — średnica sitowa ziaren poddawanych próbie zgniatania.

Współczynniki liczbowe we wzorach (19) zostały określone doświadczalnie.

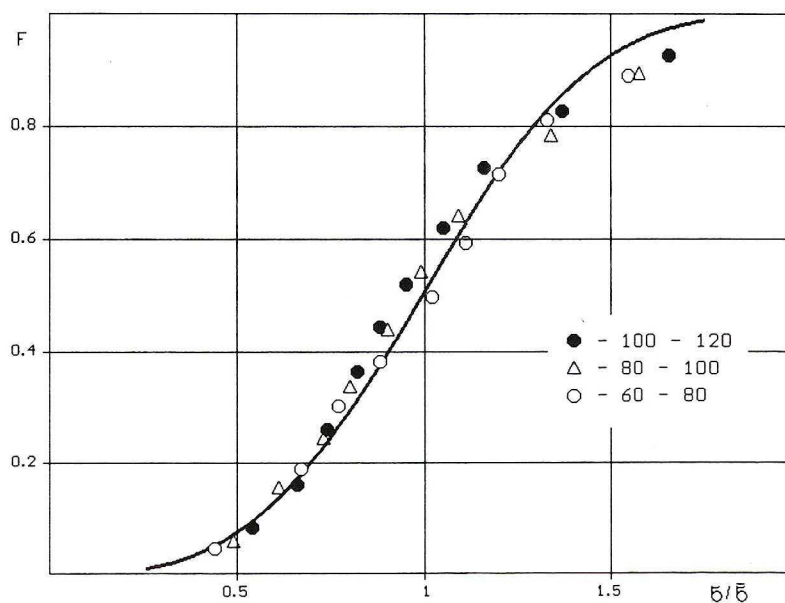
Na rysunkach 3—5 podano dystrybuanty empiryczne rozkładu wytrzymałości ziaren wapienia i porfiru (zaznaczone punktami). Dystrybuantę empiryczną rozkładu wytrzymałości





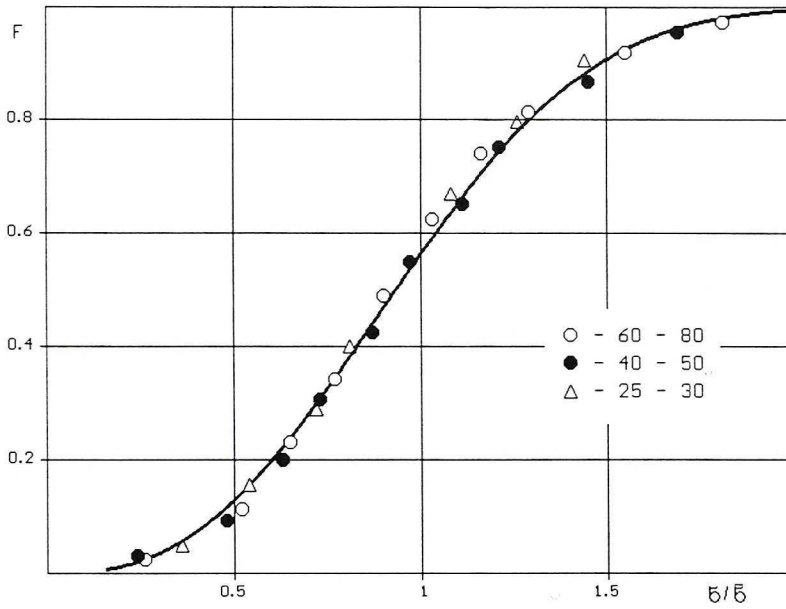
Rys. 3. Dystrybuanta rozkładu wytrzymałości na rozciąganie ziaren wapienia 20—60 mm

Fig. 3. The distribution function of tensile strength of the limestone 20—60 mm particles



Rys. 4. Dystrybuanta rozkładu wytrzymałości na rozciąganie ziaren wapienia 60—120 mm

Fig. 4. The distribution function of tensile strength of the limestone 60—120 mm particles



Rys. 5. Dystrybuanta rozkładu wytrzymałości na rozciąganie ziaren porfiru

Fig. 5. The distribution function of tensile strength of the porphyry particles

aprosymowano rozkładem wynikającym z teorii najłabszego ogniwa, a mianowicie rozkładem Weibulla wyrażonym wzorem (18). Modelowe rozkłady wytrzymałości są następujące:

a) dla wapienia 20—60 mm

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-0,93\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)^{1,87}\right] \quad (20)$$

$$Q = 0,9817$$

b) dla wapienia 60—120 mm

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-0,71\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)^{3,18}\right] \quad (21)$$

$$Q = 0,9571$$

c) dla porfiru

$$F(\sigma) = 1 - \exp\left[-0,83\left(\frac{\sigma}{\bar{\sigma}}\right)^{2,58}\right] \quad (22)$$

Na rysunkach 3—5 dystrybuanty modelowe zaznaczono linią ciągłą.

Zgodność modelu z rozkładem empirycznym oceniano za pomocą następującego wskaźnika  $Q$  (Doremus 1983):

$$Q = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \hat{x}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - 1)} \quad x = \frac{\sigma}{\bar{\sigma}} \quad (23)$$

gdzie  $\hat{x}_i$  jest względną wartością wytrzymałości wyliczaną z warunku  $\hat{F}(\hat{x}_i) = F(x_i)$ . Zatem wartość  $\hat{x}_i$  jest równa:

$$\hat{x}_i = \left[ -\frac{1}{c} \ln(1-F) \right]^{1/m} \quad (24)$$

Dla  $Q = 1$  zgodność modelu z doświadczeniem jest idealna. Jeśli wskaźnik  $Q > 0,95$  zgodność jest dobra. Wyliczone wartości wskaźnika  $Q$  świadczą, że zgodność modelu z doświadczeniem jest bardzo dobra. Próbki wapienia 20—60 mm oraz 60—120 mm zostały pobrane w dwóch różnych miejscach złoża w odstępie czasowym dwóch lat. Z tego względu parametry rozkładu uzyskane dla obu próbek są różne. Świadczy to o dużej zmienności złoża jeśli chodzi o właściwości wytrzymałościowe.

### 3.2. Rodzaj szczelin i średnia wytrzymałość ziaren

Zależność rozkładu wytrzymałości ziarna we wzorze (15) oraz średniej wytrzymałości wyrażonej wzorem (16) od objętości ziarna uzyskano zakładając, że liczba szczelin w ziarnie jest proporcjonalna do jego objętości. Przyjęto zatem, że szczeliny mają charakter objętościowy. Jak założył Gilvarry (1961), w materiałach kruchych istnieją trzy typy szczelin: objętościowe, powierzchniowe i krawędziowe. Uogólniając można zatem przyjąć, że stosownie do typu szczelin ich liczba w ziarnie jest proporcjonalna odpowiednio do  $D^3$ ,  $D^2$  oraz  $D$ . W związku z czym, analogicznie jak we wzorze (17), parametr rozkładu Weibulla  $\sigma_0$  jest związany ze średnią wytrzymałością ziarna i jego wymiarem jedną z trzech następujących zależności:

$$\sigma_0 = \frac{\bar{\sigma}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \begin{cases} k_3 & D^{3/m} & \text{dla szczelin objętościowych} & (25a) \\ k_2 & D^{2/m} & \text{dla szczelin powierzchniowych} & (25b) \\ k_1 & D^{1/m} & \text{dla szczelin krawędziowych} & (25c) \end{cases}$$

gdzie  $k_1$ ,  $k_2$  i  $k_3$  są stałymi mającymi interpretację współczynników kształtu ziarna.

Parametr  $\sigma_0$  stanowi obok modułu Weibulla m stałą materiałową. W związku z czym dla danego surowca, analogicznie jak moduł Weibulla, powinien przyjmować wartość stałą, niezależną od wymiaru ziarna. Aby to stwierdzić, dla każdej wielkości ziarna wyliczono  $\sigma_0$  według każdego ze wzorów (25), a następnie  $\bar{\sigma}_0$  oraz rozrzut średni kwadratowy. Wyniki obliczeń podano w tabeli 1.

Z obliczeń tych wynika, że dla wapienia najmniejszy rozrzut wartości  $\sigma_0$  występuje, jeśli się założy, że zniszczenie ziarna jest następstwem istnienia szczelin krawędziowych. Natomiast w przypadku porfiru zniszczenie następuje na skutek istnienia szczelin powierzchniowych.

Stosownie do wzorów (25) oraz powyższych wniosków zależności średniej wytrzymałości ziarna na rozciąganie od jego wielkości wyrażają się wzorami:

TABELA 1

Wartości parametru  $\sigma_0$  rozkładu (3)

TABLE 1

Values of  $\sigma_0$  parameter of distribution (3)

Klasa ziarnowa [mm]	$\bar{\sigma}$ [MPa]	$\sigma_0 (D^{1/m})$ [MPa]	$\sigma_0 (D^{2/m})$ [MPa]	$\sigma_0 (D^{3/m})$ [MPa]
Wapień 20—60 mm				
20—25	5,05	0,75	0,098	0,013
25—30	4,5	0,74	0,109	0,016
30—40	4,35	0,81	0,136	0,023
40—50	3,98	0,85	0,163	0,031
50—60	4,48	1,07	0,226	0,048
Średnia	—	0,84	0,148	0,026
Rozrzut [%]		14,1	31,0	49,0
Wapień 60—120 mm				
60—80	3,41	1,65	0,72	0,31
80—100	3,75	1,97	0,93	0,43
100—120	2,91	1,62	0,81	0,41
Średnia	—	1,75	0,81	0,38
Rozrzut [%]		9	10,2	13,4
Porfir				
25—30	10,44	2,92	0,72	0,178
40—50	7,24	2,45	0,74	0,22
60—80	5,61	2,25	0,8	0,284
Średnia	—	2,54	0,75	0,227
Rozrzut [%]		11,0	4,5	19,3

a) dla wapienia

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{k_1 D^{1/m}} = \frac{a_1}{D^{1/m}} \quad (26a)$$

b) dla porfiru

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{k_2 D^{2/m}} = \frac{a_2}{D^{2/m}} \quad (26b)$$

gdzie:

$$a_1 = \frac{\sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{k_1}$$

$$a_2 = \frac{\sigma_0 \Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{k_2}$$

Na rysunku 6 przedstawiono zależności średniej wytrzymałości ziaren wapienia i porfiru od wielkości ziarna mierzonej jego średnicą sitową. Zależności te, zgodnie z wyrażeniami (26), aproksymują się następującymi wzorami:

— dla wapienia

$$\bar{\sigma} = \frac{18,38}{D^{1/m}} = \frac{18,38}{D^{0,396}} \quad (27a)$$

— dla porfiru

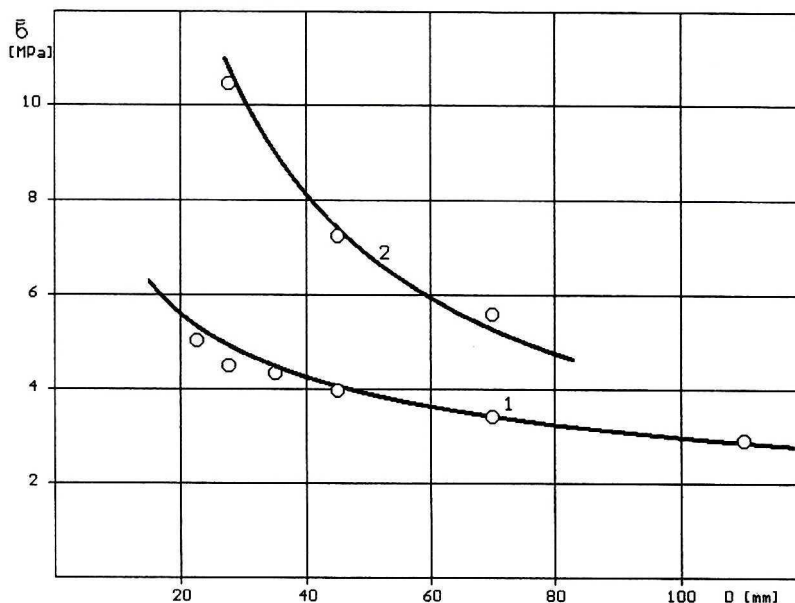
$$\bar{\sigma} = \frac{139,17}{D^{2/m}} = \frac{139,17}{D^{0,77}} \quad (27b)$$

przy czym wartość  $D$  podana jest w [mm] natomiast  $\bar{\sigma}$  w [MPa].

Za wartość modułu Weibulla dla wapienia przyjęto wartość średnią z obu badanych próbek.

Linie ciągłe na rysunku 6 wykreślone zostały według równań (27).

Jak pokazuje rysunek 6, zgodność zależności modelowych z danymi empirycznymi jest zadowalająca.



Rys. 6. Zależność średniej wytrzymałości ziaren wapienia (1) i porfiry (2) od wielkości ziarna

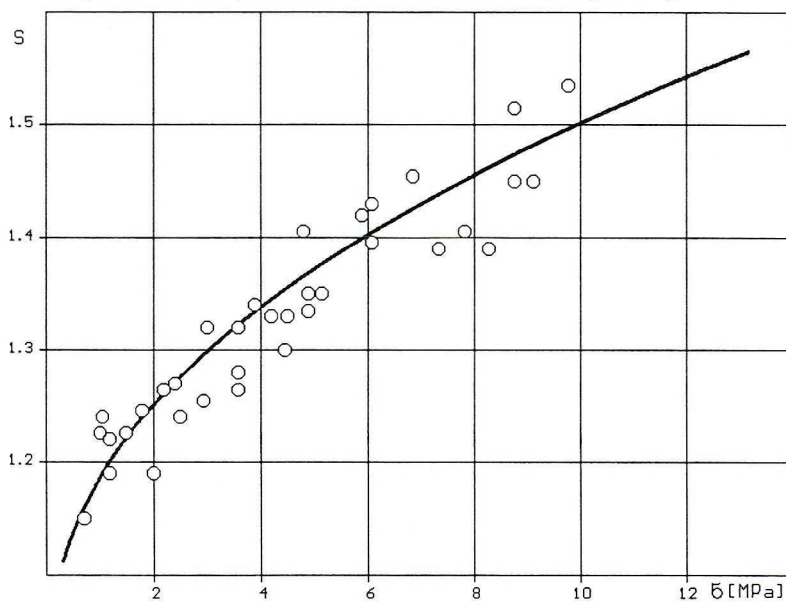
Fig. 6. The dependence of average tensile strength of the limestone (1) and porphyry (2) particles on the particle size

### 3.3. Stopień rozdrabniania

W opisie eksperymentu zaznaczono, że ziarna były poddane działaniu siły zgniatającej między dwoma płaszczyznami aż do momentu pęknięcia. Na podstawie obserwacji wizualnych dezintegracji ziarna przy ściskaniu można stwierdzić, że aż do momentu jego pęknięcia, objawiającego się charakterystycznym dźwiękiem, analogicznym jak przy klasycznej próbie rozciągania, powstają mniejsze lub większe odpryski w otoczeniu punktu przyłożenia siły. Clark stosując symulację komputerową stwierdził, że proces niszczenia jest inicjowany na powierzchni ziarna przez naprężenia ścinające powstające w otoczeniu punktu przyłożenia obciążenia i rozchodzące się w głąb próbki oraz w środku ziarna przez naprężenia rozciągające powstające i rozchodzące się od centrum do punktu przyłożenia obciążenia (Clark 1993).

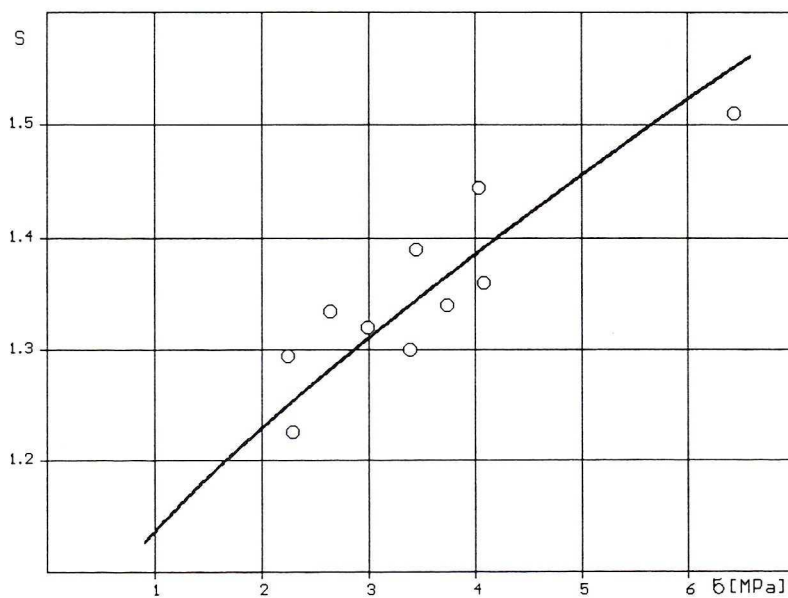
Średnia wytrzymałość ziarna na ścinanie jest zbliżona do wytrzymałości na rozciąganie (Wnuk 1977). Przy ściskaniu brył regularnych największe naprężenia ścinające powstają w płaszczyźnie nachylonej pod kątem  $45^\circ$  i mniejszym do kierunku przyłożenia siły. Zatem przy wzroście siły ściskającej naprężenia ścinające, ze względu na mniejsze pola przekroju, będą wcześniej przekraczały wartości wytrzymałości na ścinanie i na tych kierunkach będą powstawały kolejne odpryski. Przy większej wytrzymałości ziarna na rozciąganie tych odprysków powstanie więcej. W związku z tym średnia wielkość ziarna produktu kruszenia będzie mniejsza, a co za tym idzie — większy będzie stopień rozdrabniania. Wynika z tego, że stopień rozdrabniania będzie rosnącą funkcją wytrzymałości ziarna.

Na rysunkach 7—9 podano zależność stopnia rozdrabniania od wytrzymałości ziarna dla dwóch próbek wapienia różniących się modułem Weibulla oraz próbki porfiru.



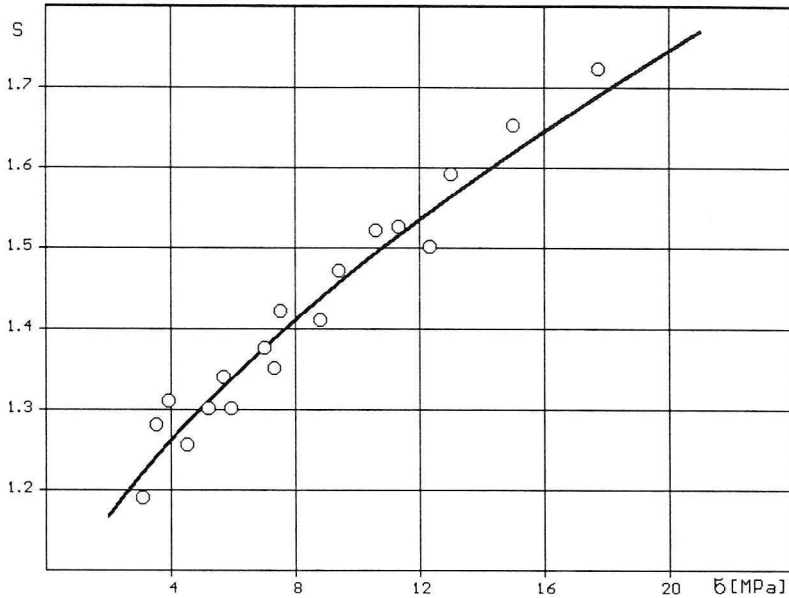
Rys. 7. Zależność stopnia rozdrabniania ziaren wapienia 20—60 mm od wytrzymałości na rozciąganie

Fig. 7. The dependence of crushing ratio of the limestone 20—60 mm particles on tensile strength



Rys. 8. Zależność stopnia rozdrabniania ziaren wapienia 60—120 mm od wytrzymałości na rozciąganie

Fig. 8. The dependence of crushing ratio of the limestone 60—120 mm particles on tensile strength



Rys. 9. Zależność stopnia rozdrabniania ziaren porfiry od wytrzymałości na rozciąganie

Fig. 9. The dependence of crushing ratio of the porphyry particles on tensile strength

Stopień rozdrabniania wyliczano według następującego wzoru:

$$S = \frac{D}{\bar{d}} \quad (28)$$

gdzie  $\bar{d}$  jest średnią ważoną wielkością ziarna w produkcie zgniatania w danej klasie siły niszczącej.

Jeżeli założyć, że średnia wielkość ziarna produktu kruszenia jest odwrotnie proporcjonalna do liczby mikroszczelin aktywnych w ziarnie pierwotnym, to stopień rozdrabniania będzie tym większy, im większa jest liczba mikroszczelin. Przez analogię z zależnością rozkładu wytrzymałości mikroszczelin opisywanego funkcją potęgową (Doremus 1983) przyjęto, że zależność stopnia rozdrabniania od wytrzymałości ziarna na rozciąganie opisywane będzie również funkcją potęgową postaci:

$$S(\sigma) = 1 + a\sigma^p \quad (29)$$

gdzie:

$a, p$  — stałe.

Krzywe ciągłe na rysunkach 7—9 wyrażają się następującymi równaniami, wyznaczonymi metodą najmniejszych kwadratów:



a) dla wapienia 20—60 mm

$$S(\sigma) = 1 + 0,186\sigma^{0,43} \quad (30)$$

b) dla wapienia 60—120 mm

$$S(\sigma) = 1 + 0,136\sigma^{0,75} \quad (31)$$

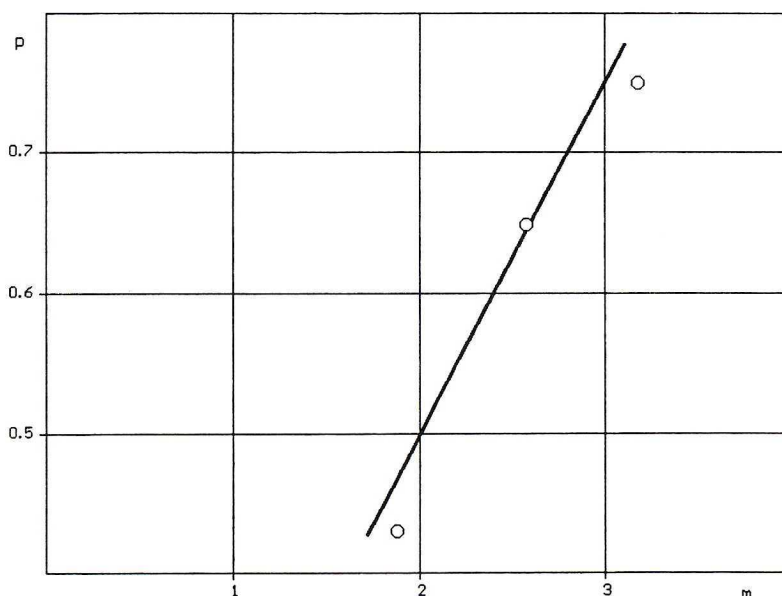
c) dla porfiru

$$S(\sigma) = 1 + 0,106\sigma^{0,65} \quad (32)$$

Stosunkowo duży rozrzut punktów w przypadku próbki ziaren wapienia 60—120 mm może wynikać z małej liczbeości próbek.

Można zauważyć, że wykładnik potęgi  $p$  we wzorach (30)—(32) jest skorelowany z modułem Weibulla  $m$ . Na rysunku 10 podana jest zależność wykładnika  $p$  od modułu Weibulla. Jest to zależność prostoliniowa wyrażona równaniem:

$$p = \frac{1}{4}m \quad (33)$$



Rys. 10. Zależność wykładnika  $p$  we wzorze (29) od modułu Weibulla

Fig. 10. The dependence of exponent in equation (29) on Weibull's modulus

Powyższa zależność jest zależnością empiryczną wyznaczoną z trzech punktów. Gdyby dalsze badania na innych surowcach potwierdziły tę zależność, uzyskaloby się związek stopnia rozdrabniania ze stałą materiałową — jaką jest moduł Weibulla, dla rozdrabniania przez zgniatanie pojedynczych ziaren.

### Wnioski końcowe

Średnia wytrzymałość ziaren jest zależna od rodzaju mikroszczelin i modułu Weibulla. Uwzględniając wyrażenia (4) i (5) oraz fakt, że moduł Weibulla jest równy  $m = 2n - 2$ , można powiedzieć, że na średnią wytrzymałość ziaren ma wpływ zarówno rozkład wielkości mikroszczelin, jak i ich liczba. W badanych tutaj surowcach wapień jest skałą jednoskładnikową (nie licząc małych domieszek innych składników), porfir natomiast skałą wieloskładnikową. Pękanie skały jednoskładnikowej (wapienia) następuje na skutek aktywacji mikroszczelin krawędziowych, natomiast pękanie skały wieloskładnikowej (porfiru) pod wpływem aktywacji mikroszczelin powierzchniowych. Odpowiedź na pytanie, czy jest to zjawisko powszechne mogą dać wyniki badań rozdrabniania innych skał jednoskładnikowych i wieloskładnikowych.

Stoień rozdrabniania jest rosnącą funkcją wytrzymałości ziaren na rozciąganie. Przez analogię z potęgową postacią rozkładu wytrzymałości mikroszczelin, zależność stopnia rozdrabniania od wytrzymałości na rozciąganie jest opisywana funkcją potęgową, przy czym wykładnik potęgi w tej zależności jest związany z modułem Weibulla. Dalsze badania empiryczne i teoretyczne rozstrzygną, czy związek ten ma charakter uniwersalny.

Artykuł jest wynikiem pracy statutowej AGH Nr 11.11.100.238

### LITERATURA

- Brożek M., 1996 — Immediate tensile strength of irregular particles. *Arch. Min. Sci.* 41, 341—360.
- Clark J.H., 1993 — The role of rock fabric in controlling crushing strength: numerical experiments. *Proc. XVIII IMPC, Sydney*, vol. I, p. 187—192.
- Cottrell A.H., 1964 — The mechanical properties of matter. J. Wiley and Sons, New York.
- Doremus R.H. 1983 — Fracture statistics: A comparison of the normal, Weibull and Type I extreme value distribution. *J. Appl. Phys.* 54, 193—198.
- Frechet M., 1927 — Sur la loi de probabilité de l'écart maximum. *Ann. Soc. Polon. Mat.* 6, 93—116.
- Freudenthal A.M., 1968 — in *Fracture*, H. Liebowitz ed., vol.2, Academic Press, New York, p. 591—619.
- Gillvarry J.J., 1961 — Fracture of brittle solids. I. Distribution function for fragment size in single fracture (theoretical). *J. Appl. Phys.* 32, 391—399.
- Griffith A.A., 1921 — Phenomena of rupture and flow in solids. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* 221, 163—198.
- Jayatilaka A.S., Trustrum K., 1977a — Statistical approach to brittle fracture. *J. Mater. Sci.* 12, 1426—1430.
- Jayatilaka A.S., Trustrum K., 1977b — Application of statistical method to brittle fracture in biaxial loading systems. *J. Mater. Sci.* 12, 2043—2048.
- Trustrum K., Jayatilaka A.S., 1979 — On estimating the Weibull modulus for a brittle material. *J. Mater. Sci.* 14, 1080—1084.
- Trustrum K., Jayatilaka A.S., 1983 — Applicability of Weibull analysis for brittle materials. *J. Mater. Sci.* 18, 2763—2770.

Wnuk M.P., 1977 — Podstawy mechaniki pękania. Wyd. AGH, Kraków.

Weibull W., 1951 — A Statistical Distribution Function of Wide Applicability. J. Appl. Mech. 18, 293—297.

MARIAN BROŻEK, EWA ORUBA-BROŻEK

#### THE EFFECT OF STRUCTURE OF MINERAL PARTICLES ON THEIR STRENGTH PROPERTIES EXEMPLIFIED BY LIMESTONE AND PORPHYRY

##### Key words

Porphyry, limestone, tensile strength, Weibull's distribution, pre-existing microcracks, crushing ratio

##### Abstract

Theoretical tensile strength of brittle materials is  $10^2$ — $10^4$  times larger than real strength. The particle structure, apart from the force of atomic bonds in an ideal crystal, affects real strength. A single-phase particle, spatially continuous and homogenous from the point of view of its chemical composition, is assumed to be the basis. A real particle is formed by means of introducing pre-existing microcracks and other geometrical and physical internal defects. The size distribution and number of these defects, affecting the particle strength, form the mechanical structure of a particle. Since both the number and size of pre-existing microcracks are random variables, respectively the particle tensile strength is a random variable, described by Weibull's distribution.

This paper has analysed the effect of particle structure on its tensile strength from the point of view of the weakest link theory and the statistical theory of fracture. In both cases for the distribution is obtained whose parameters are connected with the distribution of microcracks lengths (formulas 5 and 15).

The next part of the paper shows the results of empirical tensile strength tests of limestone and porphyry particles. The authors set distribution functions of tensile strength (formulas 20—22 and figures 3—5) and calculated Weibull's moduli of the tested samples and the average particle strength. The average particle tensile strength is connected with the particle size by one of the formulas (25), depending on the fact whether particle fracture resulted from stimulating the volume, surface or edge microcracks. In case of limestone (one-component material) the particle fracture is caused by edge microcracks (formula 27a) while for porphyry (multi-component material) by surface microcracks (formula 27b).

The dependence of crushing ratio on particle strength is described by an increasing power function (formulas 29—32). The exponent in this dependence is correlated with Weibull's modulus (formula 33).

The presented results concern two raw materials. Further investigations will decide whether the obtained results are of general character, concerning all materials.