

ANALIZA ZDOLNOŚCI PROCESU

PIOTR STEFANÓW

Katedra Statystyki i Demografii Krakowskiej Akademii im. Andrzeja Frycza Modrzewskiego
e-mail: piotr.stefanow@interia.pl

ABSTRACT

P. Stefanów. *Process capability analysis*. Folia Oeconomica Cracoviensia 2013, 54: 117–132.

Capability analysis is a set of calculations used to assess whether a system is statistically able to meet a set of specifications or requirements. The use of capability indices is widespread in industry. Process capability analysis is used during the introduction stage of the process and during the process.

It is presented classical process capability indices and original analysis conducted by prof. Andrzej Iwasiewicz. There is also presented process capability analysis of attribute data and new process capability indices of attribute data.

STRESZCZENIE

Omówiono znaczenie, zadania i cele analizy zdolności procesu. Przedstawiono klasyczne oraz rozbudowane podejście do analizy zdolności procesu. Zaprezentowano sposób wyznaczania zdolności za pomocą procedury zaproponowanej przez prof. A. Iwasiewicza. Przedstawiono analizę zdolności dla danych przy alternatywnej ocenie właściwości oraz zaproponowano wskaźnik zdolności dla alternatywnej oceny właściwości.

KEYWORDS — SŁOWA KLUCZOWE

process capability analysis, process capability indices, process capability analysis of attribute data, process capability indices of attribute data, CPI, C_{pr} , C_{pkr} , C_p^A

analiza zdolności procesu, analiza wydolności procesu, analiza zdolności procesu dla alternatywnej oceny właściwości, CPI, C_{pr} , C_{pkr} , C_p^A

1. WPROWADZENIE

Analiza zdolności (wydolności) procesu (ang. *process capability analysis*) ma za zadanie sprawdzenie czy proces produkcyjny spełnia określone wymagania. Polega ona na badaniu zgodności między wymaganiami wynikającymi z projektu

produktu oraz możliwościami procesu, w którym wyrób ma być, lub jest realizowany. Wynika stąd bezpośrednio, że zdolność¹ procesu jest jednym z podstawowych elementów strukturalnych jakości produkowanego wyrobu. Im wyższa jest wydolność procesu, tym wyżej będzie oceniana jego jakość.

Analiza wydolności procesu jest prowadzona zarówno podczas etapu podejmowania decyzji o podjęciu produkcji dowolnego wyrobu, jak i podczas etapu produkcji. Negatywna ocena w czasie projektowania skutkuje najczęściej zmianą projektu lub zaniechaniem dalszych działań. Analiza zdolności procesu podczas produkcji zwykle przebiega w sposób ciągły i jest podstawowym wskaźnikiem określającym jakość procesu. W wyniku przeprowadzonej analizy wydolności procesu można uzyskać szereg korzyści², takich jak możliwość:

- wyboru najlepszego wyrobu spośród oferowanych przez różnych dostawców,
- oceny stopnia spełnienia wymagań przez badany proces odnośnie granic specyfikacji,
- wprowadzenia ewentualnych korekt procesu przez np. inżynierów procesu, projektantów,
- określenia nowych wymagań po zmianie otoczenia procesu (np. po wprowadzeniu nowych urządzeń, maszyn),
- podjęcia działań prowadzących do zmniejszenia zmienności (wariancji) procesu produkcyjnego.

Przeprowadzona analiza pozwala uzyskać odpowiedzi na pytania:

- Czy możliwości są wystarczające, aby spełnić wymagania?
- Czy wymagania nie są zbyt wysokie w porównaniu z możliwościami?

Wydolność nie zawsze jednak dotyczy procesów przemysłowych³, ale także procesów świadczenia usług. Na przykład nauczyciel akademicki podczas projektowania zajęć (definiowania programu studiów, pisaniu sylabusu) oraz podczas realizacji zajęć musi próbować znaleźć odpowiedź na powyższe pytania. Czy możliwości studentów są wystarczające, aby spełnić wymagania? Czy wymagania prowadzącego nie są zbyt niskie lub zbyt wysokie w porównaniu z możliwościami intelektualnymi studentów?

Celem pracy jest zaprezentowanie oryginalnego dorobku Profesora Andrzeja Iwasiewicza z zakresu analizy wydolności procesu oraz przedstawienie propozycji wskaźnika zdolności procesu dla alternatywnej oceny właściwości.

W pracy omówiono zadania i cele analizy wydolności procesu. Przedstawiono klasyczne oraz rozbudowane podejście do tej analizy. W kolejnej części

¹ Prof. Andrzej Iwasiewicz promował pojęcie „wydolność” (Statistica (1997); Iwasiewicz (1996, 2005)). Pojęcia te mogą być traktowane jako synonimy, przy czym „wydolność” nieco lepiej wyraża istotę rzeczy, zob. Iwasiewicz (2005).

² Zob. Montgomery (2005).

³ W literaturze przedmiotu dyskutuje się praktycznie wyłącznie o procesach produkcji wyrobów.

zaprezentowano sposób wyznaczania współczynnika zdolności za pomocą procedury zaproponowanej przez Profesora Andrzeja Iwasiewicza (2005). Pracę kończy opis analizy wydolności dla danych przy alternatywnej ocenie właściwości oraz propozycja wskaźnika zdolności dla alternatywnej oceny właściwości.

2. KLASYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY ZDOLNOŚCI

Podstawą oceny zgodności między wymaganiami projektu i możliwościami procesu jest oczekiwany poziom jakości wykonania⁴. Jeśli można oczekiwać wysokiej jakości wykonania, a więc jeśli proces ma zdolność do odtwarzania projektu praktycznie w każdym akcie produkcji, to proces taki jest oceniany jako zdolny. Proces jest wydolny jeśli może sprostać postawionemu przed nim zadaniu, w sensie przyjętego kryterium zgodności. Jest on natomiast niewydolny, jeśli temu zadaniu nie może sprostać. Celem analizy wydolności procesu jest rozstrzygnięcie, czy w konkretnym przypadku spełniona jest nierówność (1):

$$Q(A; X, Z, E) \geq Q_0 \quad (1)$$

w której $Q(A; X, Z, E)$ oznacza poziom jakości wykonania oceniany ze względu na zmienną diagnostyczną X , jakiego można oczekiwać realizując projekt produktu A w procesie technologicznym Z przy określonych warunkach ekonomicznych E . Q_0 jest najniższym możliwym do zaakceptowania poziomem jakości wykonania.

Jeśli między projektem i procesem zachodzi zgodność, w sensie nierówności (1), to istnieje też możliwość zapewnienia wymaganego poziomu jakości wykonania za pomocą standardowych procedur operacyjnego sterowania jakością. Jeśli nie ma owej zgodności (proces nie jest wydolny), to nie ma możliwości zapewnienia wymaganego poziomu jakości wykonania bez odpowiednich działań w sferze prewencji. Konieczne są wówczas zmiany w projekcie produktu, modyfikacje procesu technologicznego albo działania zmierzające w obu tych kierunkach jednocześnie. Jeśli działania te nie prowadzą do celu, to wówczas pozostają poszukiwania innego, mniej wymagającego odbiorcy produktu, albo rezygnacja z wytwarzania wyrobu lub świadczenia usługi.

W praktycznych zastosowaniach, dla danych przy liczbowej ocenie właściwości, do oceny nierówności (1) wykorzystuje się „klasyczny” wskaźnik zdolności procesu (C_p). Pozwala on ocenić w jakim stopniu proces jest zdolny spełniać wymagania wyznaczone specyfikacjami. Podstawowy wskaźnik zdolności procesu jest określony wzorem (2).

⁴ Zob. Iwasiewicz (2005).

$$C_p = \frac{TG - TD}{6 \cdot \sigma}, \quad (2)$$

gdzie:

TD — dolna granica przedziału tolerancji,

TG — górna granica przedziału tolerancji,

σ — odchylenie standardowe, charakteryzujące precyzję procesu ze względu na obserwowaną zmienną diagnostyczną.

W literaturze przedmiotu⁵ można znaleźć inne oznaczenia:

- zamiast C_p (ang. *capability process*) można spotkać oznaczenia PCI (ang. *process capability index*) lub $PCI_{6\sigma}$ (subskrypt 6σ wskazuje na przedział naturalnej zmienności procesu o długości wynoszącej sześć sigma),
- dolna granica tolerancji TG (tolerancja dolna) jest zastępowana określeniami L (ang. *lower*), LSL (ang. *lower specification limit*), LTL (ang. *lower tolerance limit*), x_d (dolna wartość przedziału tolerancji),
- zamiast skrótu TD (tolerancja dolna) występują U (ang. *upper*), USL (ang. *upper specification limit*), UTL (ang. *upper tolerance limit*), x_g (górna wartość przedziału tolerancji),
- odchylenie standardowe σ (sigma) jest zastępowane symbolami $\hat{\sigma}$ lub s , które wskazuje, że wartość ta jest szacowana z próbki.

W normach⁶ wzór (2) opatrzony jest następującymi wskazówkami interpretacyjnymi:

- proces niewydolny: $C_p < 1$,
- średnia zdolność procesu, „akceptowalne minimum”: $1 \leq C_p \leq 1,33$,
- wysoka⁷ zdolność procesu: $C_p > 1,3$.

Podstawowy wskaźnik zdolności procesu C_p jest stosunkiem „wyspecyfikowanej tolerancji” oraz „rozrzutu procesu”, ponieważ licznik wzoru reprezentuje wymagania projektu, natomiast mianownik opisuje możliwości procesu technologicznego.

Długość przedziału tolerancji jest zależna od wielu czynników, a najczęściej od wymagań kontrahentów (np. długość urządzenia powinna wynosić $150 \text{ mm} \pm 0,2 \text{ mm}$) oraz od wymagań marketingowych (ciężar produktu powinien wynosić 500 g, nie więcej jednak niż 505 g i nie mniej niż 499 g).

Możliwości procesu technologicznego są opisywane za pomocą przedziału tak zwanej naturalnej zmienności procesu (ang. NPI — *natural process interval*)

⁵ Zob. ISO 8258, ISO 3534, Iwasiewicz (2005), Montgomery (2005), Thomson i in. (2005), Sałaciński (2009).

⁶ Zob. ISO 8258, ISO 21747.

⁷ W pracy Oaklanda (2008) wyróżnionych jest więcej wartości „granicznych” tj. $C_p = 1,5$, $C_p = 1,6$ oraz $C_p = 2$.

opartego na właściwościach rozkładu normalnego. Długość przedziału naturalnej zmienności procesu jest tak skonstruowana, że obejmuje 99,73% wszystkich możliwych realizacji obserwowanej zmiennej diagnostycznej dla wycentrowanego procesu.

Wartość C_p odpowiada na pytanie, ile razy przedział tolerancji jest dłuższy od przedziału naturalnej zmienności procesu.

Ocena zdolności procesu za pomocą podstawowego wzoru (2) nie jest pozbawiona niedogodności, takich jak na przykład wymienione w poniższych punktach:

1. Brak odniesienia do położenia przedziału naturalnej zmienności procesu i przedziału tolerancji. Przedział tolerancji w porównaniu do naturalnej zmienności procesu może być dużo dłuższy, ale wartości uzyskane podczas realizacji procesu mogą leżeć poza granicami specyfikacji (np. $TG = 1060$, $TD = 1000$, $\sigma = 5$, $\bar{x} = 900$, gdzie \bar{x} oznacza średni poziom analizowanego procesu. W wyniku obliczeń uzyskano wysoką wartość wskaźnika zdolności $C_p = 2$, natomiast rzeczywiste realizacje procesu leżą poza przedziałem tolerancji).
2. Założenie, że przeciętny poziom analizowanego procesu jest umiejscowiony w środku przedziału tolerancji $\bar{x} = m_0$, gdzie $m_0 = (TG + TD)/2$.
3. Założenie, że przeciętny poziom analizowanego procesu odpowiada wartości docelowej TV (ang. *target value*) $\bar{x} = TV$.
4. Założenie normalności rozkładu zmiennej decyzyjnej.

Punkt 1. Brak odniesienia przedziału naturalnej zmienności procesu i przedziału tolerancji.

Wyeliminowanie absurdalnej sytuacji ($C_p = 2$ i wszystkie obserwacje leżą poza granicami specyfikacji) wymaga każdorazowo sprawdzenia, czy średni poziom procesu (\bar{x}) znajduje się wewnątrz przedziału tolerancji, czyli czy zachodzi zależność:

$$TG \leq \bar{x} \leq TD. \quad (3)$$

Dalsze działania mają sens tylko wtedy, gdy zachodzi nierówność (3).

W przypadku, gdy:

$$\bar{x} \notin [TD; TG], \quad (4)$$

analizę zdolności procesu należy zakończyć stwierdzeniem, że proces jest niewydolny.

Punkt 2. Założenie, że przeciętny poziom analizowanego procesu jest umiejscowiony w środku przedziału tolerancji.

Wskaźnik zdolności procesu, który zależy od wycentrowania badanego procesu jest określany⁸ wzorem (5).

$$C_{pk} = \min\{C_{pl}, C_{pu}\}, \quad (5)$$

gdzie:

$$C_{pl} = \frac{\bar{x} - TD}{3 \cdot \sigma} \quad (6)$$

oraz

$$C_{pu} = \frac{TG - \bar{x}}{3 \cdot \sigma}. \quad (7)$$

Jeśli $C_p = C_{pk}$, to wtedy proces jest wycentrowany ($\bar{x} = m_0$). W przeciwnym przypadku zachodzi nierówność (8):

$$C_p > C_{pk}. \quad (8)$$

Wymagania wobec wycentrowanego wskaźnika zdolności C_{pk} są takie same, jak w przypadku wskaźnika C_p .

Punkt 3. Założenie, że przeciętny poziom analizowanego procesu odpowiada wartości docelowej.

Odpowiedni wskaźnik dla procesu, w którym przeciętne wartości nie są równe wartości docelowej⁹ (punkt 3) ma postać¹⁰ (wzór 9):

$$C_{pm} = \frac{TG - TD}{6\sqrt{\sigma^2 + (\bar{x} - TV)^2}}. \quad (9)$$

Jak wynika ze wzoru (9) dla procesu, w którym wartość docelowa pokrywa się ze średnią ($\bar{x} = TV$), mamy $C_p = C_{pm}$.

Wymagania stawiane wskaźnikowi położenia procesu C_{pm} są takie same, jak w przypadku wskaźnika C_p .

Wskaźnik położenia procesu C_{pm} uwzględniającego przesunięcie średniej wobec środka przedziału tolerancji przedstawia wzór (10).

⁸ Na przykład Iwasiewicz (2005), Montgomery (2005), Thomson i in. (2005), Sałaciński (2009).

⁹ W pracy Iwasiewicza (2005) do określenia wartości docelowej wykorzystuje się symbol x_0 , natomiast w pracy Sałacińskiego (2009) symbolu WD (wartość docelowa).

¹⁰ Zob. Montgomery (2005), Sałaciński (2009).

$$C_{pmk} = \min \left\{ \frac{\bar{x} - TD}{3\sqrt{\sigma^2 + (\bar{x} - TV)^2}}, \frac{TG - \bar{x}}{3\sqrt{\sigma^2 + (\bar{x} - TV)^2}} \right\}. \quad (10)$$

Wzór (10) przedstawia „uniwersalny” wskaźnik zdolności procesu dla przypadku, w którym wartości średniej procesu, środka przedziału tolerancji i wartość docelowa nie są równe ($\bar{x} \neq TV \neq m_0$).

Punkt 4. Założenie normalności rozkładu zmiennej decyzyjnej.

Jeśli pomiary uregulowanego procesu nie są zgodne z rozkładem normalnym, wymagana jest modyfikacja¹¹ odpowiednich wskaźników zdolności procesu.

$$C_p(q) = \frac{TG - TD}{x_{0,99865} - x_{0,00135}}, \quad (11)$$

gdzie $x_{0,99865}$ oraz $x_{0,00135}$ to odpowiednio kwantyle rzędu 0,99865 oraz 0,00135.

Ogólna zasada oceny zdolności (wzór 2) pozostała niezmienną, gdyż zachowano długość przedziału naturalnej zmienności procesu wynikającą z formalnych właściwości rozkładu normalnego. Nietrudno bowiem wykazać, że wartość różnicy $x_{0,99865} - x_{0,00135}$ odpowiada dokładnie wartości różnicy $(\mu + 3\sigma) - (\mu - 3\sigma)$.

Definiuje się również odpowiedniki wzoru (6) oraz wzoru (7).

$$C_{pl}(q) = \frac{x_{0,5} - TD}{x_{0,5} - x_{0,00135}} \quad (12)$$

oraz

$$C_{pu}(q) = \frac{TG - x_{0,5}}{x_{0,99865} - x_{0,5}}, \quad (13)$$

gdzie

$x_{0,5}$ to kwantyl rzędu 0,5 (mediana).

Należy dodać, że przedstawione rozważania nie wyczerpują tematu. W literaturze przedmiotu¹² omawianych jest więcej problemów związanych z analizą zdolności. Dyskutowane są tam np. inne wskaźniki różniące się sposobem szacowania wartości odchylenia standardowego, rozważana jest również zdolność krótko- i długookresowa, czy też zdolność maszyn i urządzeń.

¹¹ Zob. Iwasiewicz (2005), Montgomery (2005), Thomson i in. (2005), Sałaciński (2009).

¹² Zob. Iwasiewicz (2005), Montgomery (2005), Thomson i in. (2005), Sałaciński (2009).

3. NIEKLASYCZNE PODEJŚCIE DO ANALIZY ZDOLNOŚCI

Profesor A. Iwasiewicz przedstawił¹³ dodatkowe czynniki, które wskazują na słabość klasycznej analizy zdolności procesu, tj:

1. Przyjęcie układu odniesienia (przedziału naturalnej zmienności procesu) na poziomie 6σ . Oznacza to, że dla $C_p = 1$ największą dopuszczalną wadliwość strumienia produktu generowanego przez uregulowany proces ustala się na poziomie 0,0027 (0.27%). W większości przypadków występujących w praktyce przemysłowej są to wymagania wygórowane. Wadliwości poprodukcyjne rzędu 1%, a tym bardziej 0,5%, uważa się często za wystarczające. Przy obecnym poziomie technologii uzyskiwanie wadliwości niższych jest oczywiście możliwe, ale wiąże się z bardzo szybkim przyrostem kosztów wytwarzania, co stawia pod znakiem zapytania opłacalność działań mających na celu zmniejszenie wadliwości.
2. Oczekiwana wadliwość strumienia produktu nie jest tu zmienną decyzyjną. Ma to ten skutek, że w taki sam sposób formułowane są wymagania w przypadku produkcji różnych wyrobów (np. gwoździ i smartfonów).
3. Nadmierny margines bezpieczeństwa przy formułowaniu ocen (wadliwość na poziomie minimum 0,0027), całkowite pomijanie kosztów związanych z utrzymaniem tak niskiej wadliwości).

W pracy Iwasiewicza (2005) została przedstawiona oryginalna koncepcja analizy zdolności. Przyjmijmy, że liczbowym obrazem pojedynczej badanej cechy produktu, jest ciągła zmienna losowa X , którą potraktuje się jako zmienną diagnostyczną. Skoncentrujmy się na przypadku, gdy zmienna ta ma rozkład normalny. Założenie to sprecyzujemy następująco:

$$X \sim N(\mu \in \mathbf{M}; \sigma), \quad (14)$$

gdzie odchylenie standardowe σ jest miarą losowej zmienności procesu ze względu na obserwowaną zmienną diagnostyczną X , natomiast \mathbf{M} jest zbiorem wartości μ , które mogą być zrealizowane w rezultacie technicznej regulacji procesu, albo urządzenia technologicznego.

Zgodnie z techniczną naturą rozważanego problemu, w dalszych rozważaniach będziemy zakładać, że precyzja procesu jest ustalona (zwłaszcza w krótkich przedziałach czasu) i nie może ona być bieżąco korygowana. Na średni poziom procesu można natomiast w pewnych granicach oddziaływać, poprzez odpowiednie manipulowanie technicznymi urządzeniami regulacyjnymi. Jeśli proces oceniany jest ze względu na ciągłą zmienną diagnostyczną, to wymagania w stosunku do tego procesu określane są poprzez:

¹³ Zob. Iwasiewicz (2005).

1. przedział tolerancji ($TG; TD$),
2. wartość docelową, albo nominalną, $TV \in (TD; TG)$ oraz
3. największą dopuszczalną wadliwość produktu $p_0(X)$.

W takiej sytuacji w postępowaniu zmierzającym do oceny wydolności procesu należy wyróżnić cztery kolejne etapy.

Etap 1. Należy sprawdzić czy przyjęta w projekcie nominalna (albo docelowa) wartość TV należy do przedziału \mathbf{M} . Jeśli $TV \notin \mathbf{M}$, to postępowanie jest zakończone. Oznacza to bowiem, że ze względu na techniczne ograniczenia nie można uruchomić procesu produkcji wyrobu. Jeśli natomiast $TV \in \mathbf{M}$, to można przystąpić do kolejnego etapu postępowania.

Etap 2. Należy sprawdzić poprawność procesu¹⁴ przy istniejących uwarunkowaniach technicznych i organizacyjnych. Jeśli $\bar{x} = TV$, to należy przejść do kolejnego etapu postępowania. Jeśli natomiast $\bar{x} \neq TV$, to należy ocenić ekonomiczne skutki ewentualnego zaakceptowania średniego poziomu procesu $\bar{x} \neq TV$. Jeśli ten zmodyfikowany średni poziom procesu może być zaakceptowany, to należy przejść do następnego etapu postępowania. Jeśli natomiast taka akceptacja jest niemożliwa, to postępowanie jest zakończone negatywną oceną wydolności procesu.

Etap 3. Należy sprawdzić czy zmienność procesu jest wystarczająco mała. W tym celu należy zweryfikować prawdziwość nierówności $p(X) \leq p_0(X)$, gdzie $p_0(X)$ jest największą dopuszczalną wadliwością produktu generowanego przez badany proces, ze względu na zmienną X , przy istniejących uwarunkowaniach procesu. Jeśli nierówność ta jest spełniona, to ocena zdolności procesu jest pozytywna, jeśli natomiast nie jest spełniona, to końcowa ocena jest negatywna.

Etap 4. Jeśli końcowa ocena jest pozytywna, to w kolejnym, ostatnim kroku postępowania należy ocenić zapas wydolności, jakim dysponuje badany proces.

Przykład 1 (Iwasiewicz (2005))

Wymagania techniczno-marketingowego projektu produktu są następujące:

Dolna granica tolerancji $TD = x_d = 10$.

Górna granica tolerancji $TG = x_g = 20$.

Wartość docelowa $TV = x_0 = 15$.

Największa dopuszczalna wadliwość produktu $p_0(X) = 0,03$ (3%).

Obserwowana zmienna diagnostyczna X podlega rozkładowi normalnemu o następujących parametrach $\bar{x} \in M = [12; 16]$ oraz $\sigma = 2$.

Czy proces ten jest wystarczająco wydolny?

¹⁴ Poprawność jest rozumiana jako zgodność średniej procesu z wartością docelową.

Etap 1. Należy sprawdzić czy $TV \in \mathbf{M}$? W rozważanym przypadku warunek ten jest spełniony, albowiem $15 \in [12; 16]$.

Etap 2. Należy ustalić przeciętną wartość procesu na takim poziomie, by $TV = \bar{x} = 15$. Zapewnia to uzyskanie najmniejszej możliwej w danych warunkach wadliwości produktu.

Etap 3. Należy sprawdzić czy jest spełniona nierówność $p_0(X) \leq 0,03$ (3%). Wykorzystując elementarne własności rozkładu normalnego, mamy:

$$\begin{aligned} p(X) &= \Pr(X < 10) + \Pr(X > 20) = \Phi\left(\frac{10-15}{2}\right) + 1 - \Phi\left(\frac{20-15}{2}\right) = \\ &= \Phi(-2,5) + 1 - \Phi(2,5) = 0,0062 + 1 - 0,9938 = 0,0124 \quad (1,24\%). \end{aligned}$$

Ponieważ $p(X) = 1,24\% < p_0(X) = 3\%$, zatem zachodzi zgodność między wymaganiami projektu i możliwościami procesu technologicznego. W uregulowanym procesie technologicznym należy oczekiwać wadliwości na poziomie 1,24%, podczas gdy największa dopuszczalna wadliwość wynosi 3%.

Etap 4. Dalsza analiza polega na ocenie zapasu wydolności wynikającego z różnicy:

$$\Delta p = p_0(X) - p(X). \quad (15)$$

Im większa jest wartość Δp , a więc im większy jest zapas wydolności ocenianego procesu, tym dłużej proces ten może pozostawać w stanie rozregulowania, bez obawy o przekroczenie wartości $p_0(X)$ w całym zasobie produktu wytworzonym w określonym przedziale czasu.

Zgodnie ze wzorem (15) zapas wydolności ocenianego procesu przedstawia się następująco:

$$\Delta p = 0,03 - 0,0124 = 0,0176 \quad (1,76\%).$$

4. ANALIZA ZDOLNOŚCI PROCESU PRZY ALTERNATYWNEJ OCENIE WŁAŚCIWOŚCI

Analiza zdolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości nie jest uwzględniana w literaturze przedmiotu. Profesor Andrzej Iwasiewicz w pracy (2006) przeprowadził następujące rozumowanie.

W przypadku alternatywnej oceny właściwości produktu liczbowym obrazem badanej cechy, albo (częściej) agregatu cech, jest zero-jedynkowa zmienna diagnostyczna X , o wartościach wyznaczanych według wzoru (16):

$$X = \begin{cases} 0 & \text{– gdy jednostka produktu spełnia wymagania,} \\ 1 & \text{– gdy jednostka produktu nie spełnia wymagań.} \end{cases} \quad (16)$$

Miarą poziomu jakości jest w takiej sytuacji wadliwość $p(X)$, interpretowana jako prawdopodobieństwo pojawienia się wadliwej (niezgodnej) jednostki produktu

$$p(X) = \Pr(X = 1),$$

albo jako frakcja wadliwych lub niezgodnych jednostek produktu

$$p(X) = \frac{N(X = 1)}{N}.$$

Zdefiniowana w ten sposób wadliwość jest parametrem rozkładu obserwowanej zmiennej diagnostycznej X . Im mniejsza jest wartość $p(X)$, tym rzadziej pojawiają się wartości $x = 1$ i tym lepiej świadczy to o wydolności badanego procesu.

Z przedstawionych rozważań wynika bezpośrednio, że w przypadku alternatywnej oceny właściwości produktu badanie wydolności procesu sprowadza się w istocie do weryfikacji hipotezy zerowej postaci

$$H_0: p(X) \leq p_0(X), \quad (17)$$

wobec hipotezy alternatywnej

$$H_1: p(X) > p_0(X). \quad (18)$$

Jeśli próbka jest dostatecznie liczna, to do weryfikacji hipotezy (17) można wykorzystać następujący test¹⁵:

$$u_0 = \frac{w(X) - p_0(X)}{\sqrt{\frac{w(X) \cdot [1 - w(X)]}{n}}}. \quad (19)$$

We wzorze tym $w(X)$ jest wadliwością z próbki, czyli frakcją jednostek produktu nie wykazujących wymaganej zgodności z wzorcem ze względu na zmienną X w badanej próbce o liczebności n .

¹⁵ Zob. Aczel (2000), Iwasiewicz (2004).

Przykład 2

Największą dopuszczalną wadliwość produktu ze względu na zmienną X ustalono na poziomie $p_0(X) = 0,01$ (1%). Czy obserwowany proces technologiczny można zakwalifikować jako wydolny, jeśli w próbie losowej o liczności $n = 1000$ znaleziono $z = 12$ jednostek wadliwych? Załóżmy, że wnioskowanie należy przeprowadzić na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Po podstawieniu wartości do wzoru (19) mamy:

$$u_0 = \frac{0,012 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,012 \times 0,988}{1000}}} = 0,5808.$$

Wartość krytyczna $u_{0,05} = 1,645$. Ponieważ $u_0 = 0,5808 < u_{0,05} = 1,645$, przeto nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że $p(X) \leq 0,01$. Badany proces technologiczny należy więc zakwalifikować jako wydolny.

5. PROPOZYCJA WSKAŹNIKA ZDOLNOŚCI PROCESU PRZY ALTERNATYWNEJ OCENIE WŁAŚCIWOŚCI

Podstawową niedogodnością rozumowania przedstawionego powyżej jest konieczność znajomości teorii testów statystycznych oraz niekiedy niewielka zgodność wyników z intuicją, która ma fundamentalne znaczenie w praktycznych (przemysłowych) zastosowaniach. Zaprezentowany w przykładzie 2 sposób rozwiązania wskazuje, że proces jest zdolny pomimo tego, że otrzymana wadliwość $w(X) = 1,2\%$ jest większa od największej dopuszczalnej wadliwość produktu $p_0(X) = 0,01$ (1%).

Wydaje się, że można zaproponować prostszy sposób określenia wartości współczynników zdolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości.

Jeśli przyjmiemy, że punktem odniesienia jest C_p wzór (2), to wtedy wskaźnik zdolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości ma postać:

$$C_p^A = \frac{0,0027}{w(X)}, \quad (20)$$

gdzie

C_p^A — współczynnik wydolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości,

$w(X)$ — rzeczywista wadliwość procesu.

Wartość 0,0027 odpowiada wadliwości procesu przy liczbowej ocenie właściwości, w którym przyjmuje się przedział naturalnej zmienności procesu o długości $\pm 3\sigma$.

Przykład 3

Oceń zdolność procesu dla procesu o wadliwości wynoszącej:

- a) $w(X) = 0,001$ (0,1%),
- b) $w(X) = 0,0025$ (0,25%),
- c) $w(X) = 0,005$ (0,5%),
- d) $w(X) = 0,01$ (1%),
- e) $w(X) = 0,02$ (2%).

Po podstawieniu do wzoru (20) otrzymano następujące wyniki:

$$\text{a) } C_p^A = \frac{0,0027}{0,001} = 2,7.$$

Proces jest zdolny. Występuje duża nadwyżka wydolności procesu.

$$\text{b) } C_p^A = \frac{0,0027}{0,0025} = 1,08.$$

Proces jest zdolny. Duże zagrożenie utrzymania odpowiedniej wydolności.

$$\text{c) } C_p^A = \frac{0,0027}{0,005} = 0,54.$$

Proces nie jest zdolny.

$$\text{d) } C_p^A = \frac{0,0027}{0,01} = 0,27.$$

Proces nie jest zdolny.

$$\text{e) } C_p^A = \frac{0,0027}{0,02} = 0,135.$$

Proces nie jest zdolny.

Przy przyjętych kryteriach okazuje się, że tylko dla przypadku a) oraz b) można stwierdzić, że proces jest wydolny.

Przyjęta w powyższym przykładzie niska wadliwość $p(X) = 0,0027$ (0,27%) skutkuje bardzo restrykcyjnymi regułami określającymi zdolność procesu. Ustalmy uwagę na przypadku c) w przykładzie 3, w którym wadliwość jest równa 0,5%. W wielu przypadkach wadliwość na poziomie 0,5% wskazuje na bardzo dobrą jakość procesu, jednak jakość, w wyniku obliczenia wskaźnika zdolności procesu dla danych przy alternatywnej ocenie właściwości, jest oceniona negatywnie, gdyż $C_p^A = 0,54$. W celu uniknięcia sytuacji, w której otrzymuje się tak niskie wartości wskaźników wydolności można zmodyfikować wzór (20) w taki sposób, aby punktem odniesienia, zamiast wartości równej 0,0027, była ustalona wartość $p_0(X)$, czyli największa dopuszczalna wadliwość procesu. Wzór (20) można zapisać w następującej postaci:

$$C_{p,p_0}^A = \frac{p_0(X)}{w(X)}, \quad (21)$$

gdzie

C_{p,p_0}^A — wskaźnik wydolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości dla ustalonego punktu odniesienia na poziomie największej dopuszczalnej wadliwości.

Przykład 4

Strony (np. dział marketingu oraz technolog) ustaliły, że proces jest w odpowiedniej kondycji wtedy, gdy frakcja elementów niezgodnych nie przekracza wartości 0,01 (1%). Należy ocenić zdolność procesu dla procesu o wadliwości wynoszącej:

- $w(X) = 0,001$ (0,1%),
- $w(X) = 0,0025$ (0,25%),
- $w(X) = 0,005$ (0,5%),
- $w(X) = 0,01$ (1%),
- $w(X) = 0,02$ (2%).

Po podstawieniu do wzoru (21) otrzymano następujące wyniki:

$$a) C_{p,p=0,01}^A = \frac{0,01}{0,001} = 10.$$

Proces jest zdolny. Występuje bardzo duża nadwyżka wydolności procesu.

$$b) C_{p,p=0,01}^A = \frac{0,01}{0,0025} = 4.$$

Proces jest zdolny. Występuje bardzo duża nadwyżka wydolności procesu.

$$c) C_{p,p=0,01}^A = \frac{0,01}{0,005} = 2.$$

Proces jest zdolny. Występuje duża nadwyżka wydolności procesu.

$$d) C_{p,p=0,01}^A = \frac{0,01}{0,01} = 1.$$

Proces jest zdolny. Duże zagrożenie utrzymania odpowiedniej wydolności.

$$e) C_{p,p=0,01}^A = \frac{0,01}{0,02} = 0,5.$$

Proces nie jest zdolny.

Przy ustalonej wartości $p_0(X) = 0,01$ można stwierdzić, że dla przypadku:

- a), b) oraz c) proces jest wydolny,
- d) wydolność procesu jest zagrożona,
- e) proces nie jest wydolny.

Wykorzystanie wzorów (20) i (21) pozwala ocenić zdolność procesu bez korzystania z testów statystycznych. Wzory te mają budowę podobną do klasycznych wskaźników zdolności i podobną interpretację, tzn. im większa wartość wskaźnika wydolności, tym proces można wyżej ocenić odnośnie jakości.

Zaprezentowany wskaźnik zdolności procesu przy alternatywnej ocenie właściwości pozwala na szybkie stwierdzenie, czy proces spełnia stawiane mu wymagania. Jego prosta budowa, interpretacja zgodna z interpretacją „klasycznego” wskaźnika wydolności pozwalają mieć nadzieję, że będzie on wykorzystywany w praktyce.

6. PODSUMOWANIE

W pracy zaprezentowano dorobek Profesora Andrzeja Iwasiewicza w zakresie badań nad analizą zdolności procesów. Przedstawiono sposób rozumowania profesora zamieszczony w publikacjach, prezentowany podczas zajęć dydaktycznych oraz długich rozmów z autorem publikacji.

Zaprezentowano również propozycję miernika zdolności procesu dla alternatywnej oceny właściwości. Jest on odpowiednikiem klasycznego wskaźnika zdolności procesu wykorzystywanego przy badaniu zmiennych przy liczbowej ocenie właściwości.

Należy podkreślić, że problem oceny wydolności procesów albo urządzeń technologicznych, nie doczekał się jeszcze ogólnego i pełnego metodologicznie rozwiązania.

BIBLIOGRAFIA

- Aczel A. (2000), *Statystyka w zarządzaniu*, Pełny wykład, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa.
- Doroszewicz S., Stoma P. (2007), *Metoda bootstrapowa w sterowaniu procesami. Zdolność procesów wyznaczona metodą bootstrapową*, w: *Nowe metody statystyczne wspomagające zarządzanie jakością* (red. R. Zaleski), Komisja Nauk Towaroznawczych, Oddział Polskiej Akademii Nauk w Poznaniu, Poznań.
- Hamrol A., Mantura W. (1998), *Zarządzanie jakością, teoria i praktyka*, Wydawnictwo Naukowe PWA, Warszawa–Poznań.
- Iwasiewicz A. (1996), *Statystyczna analiza wydolności procesu*, Normalizacja, nr 8, s. 4–10.
- Iwasiewicz A., Paszek Z. (2004), *Statystyka z elementami statystycznych metod sterowania jakością*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Krakowie, Kraków.
- Iwasiewicz A. (2005), *Zarządzanie jakością w przykładach i zadaniach*, Śląskie Wydawnictwo Naukowe Wyższej Szkoły Zarządzania i Nauk Społecznych w Tychach, Tychy.

- Kończak G. (2007), *Metody statystyczne w sterowaniu jakością produkcji*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej im. Karola Adamieckiego w Katowicach, Katowice.
- Montgomery D.C. (2005), *Introduction to Statistical Quality Control*, second edition, J. Wiley & Sons, New York.
- Oakland J. (2008), *Statistical Process Control*, Sixth Edition, ELSEVIER BH, Amsterdam.
- Statistical methods — Process performance and capability statistics for measured quality characteristics*, ISO 21747.
- Karty kontrolne Shewharta* (1996), PN-ISO 8258.
- STATISTICA PL dla Windows (Tom IV): Statystyki przemysłowe* (1997), StatSoft Polska Sp. z o.o., Kraków.