NAUKA 2/2011 • 71-82

KAZIMIERZ SOBCZYK, MARCIN M. SOBCZYK

Wokół matematyki i psychologii

Matematyka i psychologia spostrzegane są zwykle jako dziedziny nauki bardzo od siebie odległe. Nie znaczy to, że nie mogą się zbliżać. Uniwersalny język matematyki staje się coraz bardziej przydatny dla psychologii.

Znane są powszechnie ogromne osiągnięcia matematyki w rozpoznawaniu mechanizmów otaczającego nas świata. Najpotężniejsze teorie nauki współczesnej, takie jak mechanika Newtona, teoria zjawisk elektromagnetycznych Maxwella czy teoria względności Einsteina, były możliwe tylko dzięki sile i uniwersalności struktur matematycznych. Jednakże przez długie lata matematyka służyła głównie do wyjaśniania świata materialnego, fizycznego. Co więcej, dzięki tym osiągnięciom stało się czymś zupełnie naturalnym, że budowanie i analiza skomplikowanych modeli matematycznych są po prostu konieczne dla ulepszania naszego życia codziennego. Często już nawet zapominamy, że takie powszechne dzisiaj obiekty, jak pociągi, okręty, samoloty czy telewizja potrzebowały dla swego zaistnienia rozwiązania wielu złożonych problemów matematycznych (np. scharakteryzowania praw dynamiki płynów czy też matematycznej analizy rozchodzenia się sygnałów elektromagnetycznych).

Skoro matematyka okazała się tak zdumiewająco skuteczna w rozpoznawaniu świata fizycznego, to stało się naturalne także czynić wysiłki w kierunku ścisłego ujmowania (opisu) zjawisk świata niematerialnego, np. zjawisk biologicznych, ekonomicznych, społecznych, a także... psychologicznych. Dokonany w tej dziedzinie postęp jest ogromny, chociaż ciągle niezadowalający. Już chwila refleksji wystarcza, aby zrozumieć, że zjawiska świata idei i zachowań ludzkich są o wiele bardziej skomplikowane niż te należące do realności fizycznej. Zjawiska w układach złożonych z istot żywych (i w samym człowieku) mają tę własność, że ich elementy magazynują nie tylko energię, ale także informację. Ludzie i grupy społeczne mogą się uczyć i zmieniać swe zachowanie zgodnie z nabytą wiedzą. W tych żywych „układach" obserwujemy zjawiska, które w ogólności nie występują w układach fizycznych; np. pamięć, intencje, emocje, a także możliwość antycypacji w czasie. Czy zatem metody matematyczne są tutaj możliwe? Odpowiedź po-

Prof. dr hab. Kazimierz Sobczyk, członek rzeczywisty PAN, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Marcin M. Sobczyk, Szkoła Wyższa Psychologii Społecznej w Warszawie (student V roku)

winna być optymistyczna, gdyż umysł ludzki „lubi" zmagać się z komplikacjami i trudnościami.

Pierwsze kroki; matematyzowanie pomiaru

Wydaje się, że związek nowoczesnej psychologii (jako odrębnej nauki) z matematyką rozpoczął się od opracowywania wyników obserwacji i pomiarów. Na przykład, badając dwie cechy (lub zmienne) psychologa interesuje często ich wzajemna współzależność, korelacja. Ilościową miarą liczbową (wskaźnikiem) owej korelacji i jej siły jest współczynnik korelacji, którego znak może być dodatni lub ujemny, a wielkość zmienia się w przedziale od -1 do $+1$. Mając dane empiryczne otrzymane z doświadczenia, oblicza się ten współczynnik na podstawie prostego wzoru matematycznego znanego w statystyce. Istotę korelacji można też przedstawić na wykresie w układzie współrzędnych na płaszczyźnie.

Innym przykładem jest *szacowanie błędu pomiaru* wyrażającego np. różnicę między wynikiem z losowej próby wziętej z badanej populacji i prawdziwym wynikiem dotyczącym całej populacji (np. w sondażach). Dokonuje się tego na podstawie znanych formuł matematycznych wyprowadzonych z rachunku prawdopodobieństwa. Trzeba też dodać, że tak powszechnie używana w psychologii empirycznej krzywa Gaussa swoją metodyczną moc wywodzi z *centralnego twierdzenia granicznego* – jednego z najważniejszych rezultatów teorii prawdopodobieństwa. Można powiedzieć ogólniej, że związek rachunku prawdopodobieństwa i psychologii realizował się, przez długi czas, głównie poprzez metody i procedury statystyki matematycznej – dziedziny, której zadaniem jest wnioskowanie z danych empirycznych w sytuacjach niepewności i losowości.

Psychologia jest nade wszystko nauką empiryczną; czerpie ona swą wiedzę o zjawiskach psychicznych ludzi i ich zachowaniu z obserwacji, eksperymentów i pomiarów. To właśnie pomiar – jego najgłębsza istota i związane z nim metodyczne trudności zwróciły uwagę psychologów na *matematyczną teorię pomiaru*. Jeśli jednak fizycy dokonywali pomiarów wielkości, które występowały w mocno matematycznie ugruntowanych prawach przyrody, to psycholodzy zapragnęli mierzyć takie charakterystyki ludzkie, jak na przykład: zdolności, poglądy czy cechy osobowości (!). W naturalny sposób wyłoniły się więc pytania o możliwość, sens i interpretację tego rodzaju pomiarów. W jaki sposób można ilościowo charakteryzować np. preferencje czy upodobania?, jak można mierzyć tak subiektywne odczucie, jak głośność dźwięku, i jak związać to wrażenie psychiczne z fizyczną wielkością, zwaną natężeniem dźwięku? Oczywiście, subiektywne oceny głośności dźwięku zależą od jego intensywności (natężenia), ale zależą także od częstości sygnału dźwiękowego; znane są krzywe jednakowej głośności ilustrujące fakt, że dźwięki o pewnych intensywnościach są odczuwalne pod względem głośności, tak samo jak dźwięki o innych intensywnościach, gdy te mają inną częstotliwość. Warto też tutaj dodać, że ten sam dźwięk może mieć różne charakterystyki psychologiczne, na przykład wspomniana wyżej głośność, ale także „coś", co charakteryzuje emocjonalne znaczenie dźwięku, a także „coś", co wywołuje skojarzenia w sferze wyobraźni.

Definiowanie pomiaru w naukach społecznych i w psychologii ma długą historię. Na przykład Russell (*Principles of Mathematics*, 1938) definiuje pomiar następująco: pomiar określonej wielkości – to metoda, dzięki której uzyskujemy wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między interesującą nas wielkością i liczbami (całkowitymi, wymiernymi czy rzeczywistymi). Wydaje się, że bardziej zadowalającą definicję (zgodną ze współczesną matematyczną teorią pomiaru) można wypowiedzieć następująco: pomiar to odwzorowanie empirycznego systemu relacyjnego (np. U) w liczbowy system relacyjny (np. B), które zachowuje wszystkie relacje i operacje na U. Teoria pomiaru zajmuje się właśnie ścisłym definiowaniem i konstruowaniem takich odwzorowań. Formułuje ona warunki lub aksjomaty, przy których pomiar ma sens i jest możliwy. Nazywa się to *problemem reprezentacji*. Gdy takie warunki zostaną sformułowane, należy następnie rozpatrzyć problem jednoznaczności, tj. zbadać, czy wprowadzony system mierzenia (skalowania) jest jedyny. Teoria pomiaru mocno wykorzystuje *matematyczną teorię relacji* (między elementami zbiorów o różnej naturze ich elementów) i konstruuje takie odwzorowania (funkcje), które zachowują relacje systemu empirycznego. Można powiedzieć, że matematyczna teoria pomiaru to system aksjomatów i twierdzeń, których celem jest wyjaśnienie, kiedy pewne atrybuty obiektów (w tym ludzi) i zdarzeń mogą być sprecyzowane ściśle, jednoznacznie i efektywnie przez liczby (Roberts, 1979).

Aby wyprowadzić konkretny związek między skalą układu empirycznego i liczbowego, zachodzi potrzeba określania właściwej funkcji f odzwierciedlającej tę relację, np. $z = f(x)$. W ogólności, postać tej funkcji nie jest znana, chcemy jednak, aby miała ona pewne „naturalne" własności, np. aby była ciągła, addytywna, a także, aby spełniała inne istotne warunki w rozważanej sytuacji. W rozwiązywaniu problemów szczegółowych teorii pomiaru należy więc znaleźć takie funkcje, które, na przykład, spełniają warunki:

$$\text{A)}\ f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{B)}\ f(x+y) = f(x)f(y), \quad \text{C)}\ f(xy) = f(x)f(y),$$

gdzie wartości argumentu funkcji należą do zbioru liczb rzeczywistych lub do jego dodatniej części. W odróżnieniu od „szkolnych" równań poszukujemy tutaj nie zmiennych niezależnych (x, y), ale nieznanej funkcji f. Powyższe równania funkcyjne mają rozwiązania:

$$\text{A)}\ f(x) = ax, \quad \text{B)}\ f(x) = 0 \text{ lub } f(x) = e^{ax}, \quad \text{C)}\ f(x) = 0 \text{ lub } f(x) = x^a,$$

gdzie a jest stałą, zaś e jest znaną liczbą równą 2,7183 (podstawa logarytmu naturalnego).

Psychologia poznawcza: podatny grunt dla matematyki

Jedne z pierwszych badań w psychologii dotyczyły procesów pamięciowych (Ebbinghaus, 1885), które ściśle łączą się ze zjawiskami poznawczymi człowieka. Z biegiem czasu badacze wykrywali coraz to nowe zależności związane z działaniem pamięci i możliwościami uczenia się. Wtedy też, za pomocą prostego wzoru matematycznego, zilustrowano zależność pokazującą, że proces uczenia się wydłuża się w określony sposób w miarę zwiększania się ilości materiału (długości ciągu elementów do zapamiętania). Zależność ta, od nazwiska autora, nazwana została *prawem Foucault* i orzeka, że czas potrzebny na wyuczenie się jakiegoś materiału równa się iloczynowi kwadratu długości ciągu i pewnej liczby stałej. Wzór przedstawia się następująco: $t = kl^2$, gdzie: t – czas potrzebny do nauczenia się, k – pewna stała dodatnia, l – długość ciągu (Strelau, 2000). Z upływem czasu proponowano kolejne hipotezy i teorie uczenia się wyrażane matematycznie, mające na celu wyjaśnienie zachowania ludzi i zwierząt w kategoriach ilościowych. W latach czterdziestych ubiegłego wieku zajmowali się tym głównie behawioryści budujący swoje modele w oparciu o proste relacje między bodźcem a reakcją, często z wykorzystaniem rozbudowanego systemu nagród i kar (np. Hull, 1943). Stopniowo zaczęto podejmować próby matematycznego opisu tego, jak przebiegają różne procesy pamięciowe, na przykład, jak wcześniej zapamiętane elementy wpływają na zapamiętanie kolejnych, lub jak szybko jesteśmy w stanie zapamiętać, zapomnieć lub przypomnieć sobie określone rzeczy. W tego rodzaju badaniach starano się, między innymi, szacować ilościowo, w jaki sposób nabywana jest wiedza związana z umiejętnościami językowymi (Atkinson, 1972).

W nurcie psychologii poznawczej ważne miejsce zajmuje *teoria przetwarzania informacji* (Miller, 1956), przy pomocy której podjęta została próba zrozumienia, jak funkcjonuje ludzki umysł. Kiedy w 1948 roku Shannon opublikował swą pracę o matematycznej teorii informacji (dla potrzeb ówczesnej techniki w zakresie łączności, przesyłania sygnałów, ich kodowania itp.) otworzyła się też możliwość, aby jej pojęcia i metody rozszerzyć na inne dziedziny. Z wiedzy tej starała się skorzystać w szczególności psychologia – w celu lepszego zrozumienia mechanizmów funkcjonowania ludzkiego umysłu. Rzeczywiście, stosunkowo szybko zauważono, że nie ma potrzeby, aby język teorii informacji ograniczać do inżynierskich układów komunikowania się. Jest on bowiem na tyle ogólny, że może być stosowany do wszystkich sytuacji, gdzie przeprowadzamy obserwacje i eksperymenty oraz poszukujemy informacji. Również z tego powodu, odnotować należy dość wczesne wykorzystanie metod matematycznej teorii informacji w statystyce, o czym świadczy książka Kullbacka (1959).

Do procesów poznawczych zaliczamy również działanie systemu pamięciowego, którym to zainteresowali się Atkinson i Shiffrin (1968). Badacze ci, korzystając z dokonań Millera (1956) w zakresie przetwarzania informacji, stworzyli tzw. magazynowy model pamięci, na który składają się trzy główne elementy. Są to: pamięć sensoryczna (odpowiedzialna za pobieranie informacji za pomocą zmysłów), pamięć krótkotrwała (mogąca pomieścić między 5 a 9 elementów, które są przetrzymywane tymczasowo) i pamięć długotrwała (o nieograniczonej pojemności, służąca do przechowywania wszelkich informacji). Ponadto, w modelu tym uwzględnionych jest wiele różnych, wzajemnie powiązanych procesów, takich jak: zapominanie, powtarzanie, wyszukiwanie czy przechowywanie. Właśnie ze względu na zachodzące w nim procesy umysł ludzki, w ujęciu wspomnianego modelu, porównywany jest do funkcjonowania komputera (tzw. metafora komputerowa) i tym wzbudził duże zainteresowanie matematyków i informatyków. Starali się oni wprowadzić rygor nauk ścisłych do, wciąż niejednoznacznych, rozważań psychologicznych oraz dostarczyć „twardszych" przesłanek, które dogłębniej wyjaśniłyby, w jaki sposób umysł ludzki przetwarza informacje. Dużą rolę odegrały w tym zakresie badania czasów reakcji przy wykonywaniu różnych zadań poznawczych, co pomogło zrozumieć mechanizmy związane z przetwarzaniem różnego typu danych, jakie zawiera ludzki umysł (np. Link i Heath, 1975).

Ogólniej można powiedzieć, że teoria informacji, jako w pełni rygorystyczna teoria matematyczna pozwala charakteryzować ilość informacji, jaką reakcja neuronu dostarcza o działającym na niego bodźcu. Co więcej, pozwala ona ocenić maksymalną ilość informacji, jaka może przechodzić przez „informacyjny kanał neuronalny". Informacja jest transmitowana między neuronami w postaci ciągu impulsów lub poprzez stopniowe zmiany potencjału błony komórkowej. We współczesnej neurobiologii metody teorii informacji wykorzystywane są też do charakteryzowania ilości informacji generowanej przez bodźce ciągłe i zmienne w czasie. W tym przypadku reakcja neuronu zależy nie tylko od aktualnie działającego bodźca, ale także od „historii" stymulacji (działającej na neuron). Nie będziemy tutaj wchodzić w dalsze szczegóły poruszanych problemów. Są one obecnie przedmiotem badań w neurobiologii (np. Borst i Theunissen, 1999). W ogólniejszym ujęciu analiza przepływu entropii i informacji w układach dynamicznych jest przedmiotem zainteresowania matematyki stosowanej (Sobczyk, 2001; Sobczyk i Hołobut, 2011).

Z omawianym tu nurtem psychologii poznawczej wiąże się też obszar badań zwany *psychofizyką*. Przedmiotem zainteresowania jest tu opisywanie zależności między fizycznymi właściwościami bodźców, jakie działają na zmysły, a wrażeniami psychicznymi, jakie wówczas powstają. Jednym z dokonań tego nurtu badań jest *teoria detekcji sygnału* (*signal detection theory*), według której komórki nerwowe (neurony) na bieżąco wysyłają informacje do mózgu, nawet wówczas, gdy nie zaistniał odpowiedni bodziec (Goldstein, 1989). Zjawisko to zwane jest *szumem neuronalnym*, a poziom owego szumu stale się waha. Nawet w przypadku wystąpienia bodźca o bardzo słabym natężeniu neurony reagują podobnie jak przy bodźcu o normalnej sile. Wówczas nasz mózg musi ustalić, czy uznać taką informację od neuronów za szum czy sygnał o realnym bodźcu. A zatem, w teorii detekcji sygnału wykrywanie bodźców traktowane jest w dużej mierze jako proces podejmowania decyzji, w którym występują cztery możliwości: trafienia, chybienia, prawidłowe odrzucenia i fałszywe alarmy. Oprócz czynników poznawczych na detekcję sygnału wpływ ma także charakter bodźca oraz to, jak bardzo wrażliwa jest dana osoba na ten bodziec. Innymi słowy, człowiek jest w stanie wykryć np. bardziej intensywne dźwięki lub sygnały świetlne łatwiej niż te mniej intensywne. Co więcej, do wywołania tej samej reakcji bardziej wrażliwa osoba wymaga mniejszej intensywności bodźca niż osoba mniej wrażliwa.

Wróćmy jednak do czterech opisanych wyżej możliwości zachowania w procesie wykrywania sygnału. Kiedy osoba nie jest pewna, czy w danej sytuacji bodziec był obecny, może zdecydować na podstawie tego, jaki rodzaj błędu w podejmowaniu decyzji jest w danym momencie mniej ryzykowny. Czy lepiej uznać, że bodźca nie ma, gdy w rzeczywistości jest (błąd chybienia), czy uznać, że bodziec wystąpił, podczas gdy naprawdę go nie było (błąd fałszywego alarmu). Można to zilustrować przykładem z życia codziennego. Załóżmy, że z niecierpliwością oczekujemy ważnego gościa. Gdy nadchodzi czas odwiedzin, może nam się wydawać, że usłyszeliśmy pukanie, jednak kiedy otwieramy drzwi, orientujemy się, że nikogo nie ma. Okazuje się, że w takich sytuacjach jesteśmy specjalnie wyczuleni na „wykrywanie" określonych bodźców, które w rzeczywistości mogą nie wystąpić. Dzieje się tak, ponieważ byłoby gorzej przegapić prawdziwe pukanie, aniżeli sprawdzić kilka razy „na próżno", zanim nasz gość naprawdę przyjdzie. Warto wiedzieć, że w różnych sytuacjach różne decyzje i strategie działania mogą być najbardziej optymalne. W tym kontekście matematyka służy psychologom do określenia prawdopodobieństwa podjęcia przez daną osobę decyzji zgodnej z określonym wzorcem. Na tej podstawie można oszacować indywidualną wrażliwość poszczególnych osób na konkretne bodźce.

Kolejne ważne odkrycie w nurcie psychofizyki opisali Weber i Fechner. Prawo nazwane od ich nazwisk sugeruje, że gdy działa na nas określony bodziec, to intensywność subiektywnego doznania z nim związana jest wprost proporcjonalna do logarytmu intensywności owego bodźca, czyli $\psi = k \log S$, gdzie: ψ – doznanie, k – stała dodatnia, S – bodziec. Pojawia się przy tej okazji pojęcie *progu różnicy*, które opisuje zdolność człowieka do stwierdzenia, że jeden z bodźców jest inny od drugiego. Kiedy postrzegane różnice są zbyt małe (poniżej progu różnicy), to porównywane bodźce (np. obiekty) wydają się takie same. Może mieć to zastosowanie w sprzedaży, kiedy producent decyduje się zmniejszyć opakowanie danego produktu (redukując w ten sposób koszty) w taki sposób, że różnica ta jest na tyle mała, iż konsumenci jej nie zauważają i nadal kupują produkt z taką samą częstotliwością (Falkowski i Tyszka, 2009). Opisana zależność związana z progiem różnicy dotyczy nie tylko zmysłu wzroku, ale także smaku lub zapachu. Do pomiaru progu różnicy wykorzystuje się pojęcie *ledwo dostrzegalnej różnicy* (ang. *just noticeable difference*), tj. takiej różnicy między bodźcami, która już może zostać zaobserwowana. Ledwo dostrzegalną różnicę można obliczyć, korzystając z następpującego równania: $\Delta I / I = k$, gdzie: I – wielkość bodźca, ΔI – przyrost wielkości tego bodźca wystarczający do zaobserwowania różnicy w spostrzeganej wielkości, k – stała dodatnia.

Wymienione zagadnienia dotyczące takich aspektów funkcjonowania umysłu, jak: pamięć, uczenie się, podejmowanie decyzji czy postrzeganie, pokazują, że psychologia poznawcza już od dawna stanowi podatny grunt dla matematyki. Nic więc dziwnego, że często mówi się o dominacji tego działu psychologii nad pozostałymi, z względu na jego bardziej ścisły i naukowy charakter. Więcej, wydaje się, że można powiedzieć, iż problemy z pogranicza psychologii poznawczej, neurobiologii i matematyki będą coraz bardziej przyciągać uwagę badaczy.

Interakcje i strategie: teoria gier

Inną ważną dziedziną, w której spotyka się psychologia z matematyką, jest teoria gier. Chodzi o ścisłe, matematyczne ujmowanie sytuacji, w których zachodzi aktywna interakcja między osobami, grupami osób konkurujących lub wchodzących w koalicje. Cechą charakterystyczną tych oddziaływań jest sprzeczność interesów, często konflikt, ale także kooperacja. Takie interakcje są przedmiotem zainteresowania wielu różnych dziedzin, jak np. ekonomii, nauk politycznych, socjologii, jak też psychologii dla której ważne jest rozpoznanie genezy konfliktów i roli różnych czynników osobowościowych oraz społecznych w ich przebiegu. Z pomocą przychodzi *teoria gier* – dziedzina matematyki stosowanej stawiająca sobie za cel budowanie ogólnego i sformalizowanego podejścia do opisu i analizy wszelkich sytuacji, w których występuje konflikt interesów, a indywidualny sukces (jednostki bądź grupy) zależy od zachowań (strategii) strony przeciwnej. Chociaż zarówno nazwa „teoria gier", jak i podstawowe pojęcia (takie jak: gracz, strategia, reguły gry, wypłata itp.) zostały zaczerpnięte z gier towarzyskich, to współczesna teoria gier rzadko do nich nawiązuje. Koncentruje się bowiem na wypracowaniu ogólnych i najbardziej racjonalnych dyrektyw/strategii działania w sytuacjach interakcji z konfrontacją interesów. Charakterystyka gry, która jest (uproszczonym) modelem rzeczywistej interakcji konfliktowej, polega na określeniu następujących elementów: liczby graczy, możliwych (dopuszczalnych) działań każdego gracza (jego strategii), reguł gry, ocen indywidualnych wyników gry (użyteczność) oraz specyfikacji preferencji graczy względem możliwych wyników (Kozielecki, 1970; Malawski, Wieczorek, i Sosnowska, 1997).

Rozstrzyganie konfliktów jest procesem decyzyjnym, chodzi bowiem o racjonalne podejmowanie decyzji o wyborze strategii, które są optymalne według przyjętych kryteriów. W tym sensie teoria gier łączy się z szerszą dziedziną nazywaną *teorią podejmowania decyzji*. Głównym czynnikiem (lub kryterium), który decyduje o wyborze strategii w sytuacji konfliktowej jest subiektywna wartość (charakteryzująca tę strategię), nazywana użytecznością (ang. *utility*, także *utility theory*). Funkcja określona na zbiorze wyników gry, której wartościami są „wypłaty”, nosi nazwę funkcji użyteczności. Może ona służyć jako wygodny sposób charakteryzowania różnych preferencji.

Czytelnik może łatwo wyobrazić sobie, że matematyczna reprezentacja rzeczywistych sytuacji konfliktu i kooperacji (szczególnie przy dużej liczbie graczy) przybierać może formę bardzo skomplikowaną. Poza tym, w wielu sytuacjach trudno jest wskazać wszystkich uczestników gry, dokładnie określić ich możliwe strategie itp. Może być też tak, że parametry określające grę nie są stałe i znane, ale zmieniające się zgodnie z pewnym rozkładem prawdopodobieństwa. Istnieją też sytuacje, których opis matematyczny w postaci gry musi jawnie uwzględniać zależność podstawowych zmiennych od czasu. Prowadzi to do modelu gry ewolucyjnej (lub różniczkowej). Na szczęście sama teoria gier – jako dziedzina nauki – jest ciągle w okresie intensywnego rozwoju.

Modelowanie matematyczne i nowe metody w psychologii

Aby dogłębnie zrozumieć i opisać złożone procesy psychologiczne, często nie wystarczy przeprowadzenie nawet serii porządnych eksperymentów. W takich sytuacjach pomocną dłoń mogą psychologom podać matematycy, którzy za pomocą, chociażby, równań różniczkowych są w stanie ściślej i precyzyjniej opisać to, co ma być wyjaśnione. W ostatnich latach taka współpraca w zakresie modelowania matematycznego w naukach społecznych obiecująco uwidacznia się w dynamicznej psychologii społecznej (Nowak i Vallacher, 1998). Takie zagadnienia, jak: dynamika związków romantycznych, koordynacja, wpływ lidera na grupę czy dynamika zmiany postaw, są coraz częściej podejmowane i opisywane przez matematyków. Dla przykładu, związek (przyjacielski bądź miłosny) dwojga ludzi można potraktować, jako układ składający się z dwu elementów, które wzajemnie na siebie wpływają. Na każdy z tych elementów oddziałują różne czynniki, jak na przykład: cechy osobowości partnerów, ich style przywiązania, poglądy, ale również zmiany nastrojów wywołane pogodą, sytuacją w rodzinie czy pracy. Co więcej, tego typu układy społeczne składają się w rzeczywistości nie z dwu, lecz często wielu osób (elementów) powiązanych ze sobą i zmieniających się w czasie. Opisanie tak złożonych struktur jest dla matematyki nie lada wyzwaniem, stąd, w dużej mierze, obecne badania skupiają się na opisie oddziaływania konkretnego czynnika (np. stylów przywiązania partnerów) na „czysty” układ dwuosobowy (Gragnani, Rinaldi i Feichtinger, 1997). Takie podejście jest oczywiście dużym uproszczeniem, gdyż skupia się na wyjaśnieniu jednego czynnika w oderwaniu od innych oraz zakłada, że partnerzy w związku za każdym razem reagują w sposób konsekwentny i zgodny z przyjętymi założeniami. Niemniej badania takie są potrzebne, gdyż im więcej jest prób matematycznego opisu dynamicznych zjawisk psychologicznych, tym jesteśmy bliżej ich zrozumienia.

Rozważmy dla przykładu dynamikę związku romantycznego (uczuciowego) – procesu, który w ostatnich latach był przedmiotem analiz matematycznych (np. Sprott, 2004). Tego rodzaju relacja międzyosobowa należy do prostszych, gdyż dotyczy tylko dwojga ludzi. Naturalnym punktem wyjścia do tej analizy jest tzw. teoria przywiązania (ang. *attachment theory*; Griffin i Bartholomew, 1994; Collins i Read, 1990), która stara się wyjaśnić, dlaczego niemowlę staje się emocjonalnie przywiązane do pierwszych opiekunów i dlaczego często odczuwa ono dyskomfort psychiczny, kiedy jest od owych rodziców oddzielone. W tym kontekście wyróżnia się różne style przywiązania (bezpieczny, lękowo-ambiwalentny, unikający) zarówno w przypadku dzieci, jak i ludzi dorosłych (Fuller i Fincham, 1995). Istnieje przekonanie, że właśnie styl przywiązania osób w związku romantycznym ma istotny (a nawet zasadniczy) wpływ na jego przebieg w czasie. Oczywiście, pierwszą kwestią w matematycznym modelowaniu uczuciowego związku romantycznego (miłości) jest właściwe zdefiniowanie takiego związku i scharakteryzowanie go poprzez odpowiednie zmienne. W psychologii zidentyfikowano kilka składników miłości, konkretnie: intymność, namiętność i zobowiązanie, a każdy z tych komponentów jest złożoną mieszaniną różnych odczuć (Wojciszke, 2004).

Jak się wydaje, pierwsza próba modelowania matematycznego procesu związku uczuciowego między dwoma osobami związana jest z nazwiskiem Strogatza (1988). Prosty model liniowy ma postać układu dwóch równań różniczkowych postaci:

$$\dot{X}_R = aX_R + bX_J$$
$$\dot{X}_J = cX_R + dX_J$$

gdzie $X_R = X_R(t)$ oznacza „intensywność" miłości mężczyzny (np. Romea) do kobiety (np. Julii) lub nienawiść (gdy X_R przyjmuje wartości ujemne) w czasie t. Analogicznie $X_J = X_J(t)$ oznacza intensywność miłości Julii do Romea. Parametry a i b specyfikują „romantyczny styl" Romea, zaś c i d charakteryzują „styl" Julii. Dokładniej, parametr a określa tę dozę uczucia Romea, która „pochodzi" od jego własnych odczuć, zaś b – dozę uczucia Romea stymulowaną przez uczucia pochodzące od Julii. Symbole $\dot{X}_R$ i $\dot{X}_J$ oznaczają pochodne odpowiednich funkcji X_R i X_J względem czasu t (tj. szybkość zmiany wartości tych funkcji, gdy czas przyrasta o bardzo małą wielkość Δt). Pierwsze równanie opisuje więc, w jaki sposób miłość Romea zmienia się w czasie; zmiana ta (dokładniej: jej szybkość) jest proporcjonalna do wielkości jego własnego zaangażowania, w chwili t i wielkości miłości okazywanej mu przez Julię. Drugie równanie charakteryzuje analogiczną zmianę „intensywności" miłości Julii. Jest oczywiste, że dodatnie wartości funkcji $X_R(t)$ i $X_J(t)$ reprezentują pozytywne odczucia miłości (od przyjaźni do namiętności), podczas gdy wartości ujemne tych funkcji są związane z odczuciami spadku intensywności związku romantycznego. Łatwo zauważyć, że parametry a i c mogą być interpretowane jako „romantyczna bezwładność", zaś b i d – jako współczynniki wpływu. Romantyczna bezwładność Romea jest maksymalna, gdy $a = 0$. Analizę powyższego układu równań przeprowadza się przy zadanym warunku początkowym (tj. zadanych wartościach funkcji $X_R(t)$ i $X_J(t)$ dla $t = t_0$) i zadanych wartościach parametrów *a, b, c, d*, które mogą być dodatnie lub ujemne.

Opisany wyżej model jest liniowy, wobec czego dynamika związku romantycznego może nie być wystarczająco realistyczna. Można jednak sformułować model w postaci nieliniowych równań różniczkowych. Wówczas w ogólności trajektorie (rozwiązania) układu dynamicznego mogą wykazywać znaczącą komplikację. Można też wyobrazić sobie, że parametry modelu nie są stałe, lecz zmieniają się w czasie. Odpowiedni układ równań (model) jest wtedy układem o zmiennych współczynnikach. Istnieje także możliwość uwzględnienia losowych fluktuacji w modelowaniu dynamiki związku romantycznego. Otrzymujemy wtedy jako model – układ stochastycznych równań różniczkowych (Sobczyk, 1973). Jak się wydaje, takie modele w kontekście problemów psychologicznych nie były jeszcze analizowane.

Ważnym obszarem w dynamicznej psychologii społecznej jest wyjaśnianie, jak powstają i zmieniają się postawy, poglądy czy sądy (dotyczące wydarzeń, ludzi etc.). Zjawiska te można również przedstawić jako układy współzależnych od siebie elementów oraz opisywać je matematycznie w postaci układów równań różniczkowych, ogólnie – nieliniowych. W tym kontekście ważne jest pojęcie *atraktora*, czyli punktu równowagi, do którego dążą trajektorie układu dynamicznego. Dla przykładu, jeśli nasze poglądy w danej kwestii są stabilne i konsekwentne, to nawet gdy dyskutujemy z kimś o innych poglądach i rozumiemy go, to po czasie, tak czy inaczej, uznamy swój punkt widzenia za słuszny. Wrócimy w ten sposób do pewnego stanu równowagi, niczym wahadło, które wykonawszy ruch, na końcu powraca do stanu wyjściowego. Może się jednak zdarzyć, że nasze poglądy w danej kwestii nie są sprecyzowane i silny wpływ mają na nas inne elementy układu społecznego. Wtedy może nastąpić przesunięcie atraktora, bądź tymczasowa zmiana liczby atraktorów (*bifurkacja*). Vallacher i Nowak (1994) zaproponowali praktyczne narzędzie do badania dynamiki tego typu zjawisk psychologicznych – tzw. metodę myszy. Polega ona na ustosunkowywaniu się na bieżąco, za pomocą ruchu kursora myszy komputerowej po ekranie, do określonych treści przedstawionych w badaniu. Na przykład, słuchając wypowiedzi polityka, równolegle operujemy myszą, w taki sposób, że zbliżenie się kursorem do środka ekranu oznacza, iż w tym momencie zgadzamy się z jego wypowiedzią, natomiast oddalenie kursora na bok ekranu oznacza, że się z nim nie zgadzamy. Szczegółowe dane liczbowe, które kryją się za tego rodzaju ruchem myszy komputerowej mogą być następnie przedstawione w postaci wykresu i wykorzystane do analizy przebiegu oraz dynamiki badanych ustosunkowań. Potencjalnie dane te mogą również posłużyć matematykom do budowania właściwego modelu badanych zjawisk.

Tak jak w układach społecznych elementami są często konkretne osoby, tak w innych obszarach psychologii modelowaniu podlegać mogą, na przykład, relacje między różnymi funkcjami mózgu. W *neuropsychologii* modelowanie matematyczne było wykorzystywane od dłuższego czasu (Grossberg, 1969). Stało się to możliwe, w dużej mierze, dzięki ściślejszemu, w porównaniu do głównego nurtu psychologii, charakterowi danych, które mogą pochodzić choćby z badań aktywności mózgowej za pomocą EEG (elektroencefalograf). Innym narzędziem wykorzystywanym coraz częściej w psychologii jest okulograf (ang. *eye-tracker*), pozwalający śledzić i analizować ruch gałek ocznych. Narzędzie to dostarcza bardzo konkretne dane, które mogą służyć także matematykom do opisu różnych procesów uwzględniających zmysł wzroku. Od strony psychologicznej okulograf stosowany jest przy projektowaniu reklam (pomaga określić, na jakich elementach klienci najczęściej skupiają wzrok) oraz w lingwistyce poznawczej (dziedzinie zajmującej się badaniem relacji między językiem a procesami umysłowymi). Wydaje się, że modelowanie matematyczne oraz nowe metody badawcze (np. metoda myszy, okulograf) będą odgrywały w psychologii i innych naukach społecznych coraz poważniejszą rolę.

Podsumowując cały niniejszy tekst dotyczący powiązań między matematyką a psychologią, należy wyraźnie zaznaczyć, że nie mógł on wyczerpać wszystkich istniejących relacji między tymi dwiema rozległymi dziedzinami nauki. Autorzy starali się naświetlić te obszary psychologii, które z powodzeniem korzystały z wiedzy matematycznej. Począwszy od pierwszych metod statystycznych i teorii pomiaru, poprzez zastosowania w psychologii poznawczej, po modelowanie matematyczne różnych zagadnień społecznych i psychologicznych.

Literatura cytowana

Atkinson R.C. (1972). *Ingredients for a theory of instruction*. „American Psychologist" 27, 921-931.

Atkinson R.C., Shiffrin R.M. (1968). *Human memory: A proposed system and its control processes.* [W:] K.W. Spence, J.T. Spence (red.), *The psychology of learning and motivation: Advances in research and theory*. New York: Academic Press.

Borst A., Theunissen F.E. (1999). *Information theory and neural coding*. „Nature Neuroscience" 2(11), 947-957.

Collins N.L. i Read S.J. (1990). *Adult attachment, working models and relationship quality in dating couples.* „Journal of Personality and Social Psychology" 58, 644-663.

Ebbinghaus H. (1885). *Über das Gedächtnis*. Leipzig: Dunker (tłum. H.I. Ruyer, C.E. Bussenius) (1913). *Memory*. New York: Teachers College, Columbia University.

Falkowski A., Tyszka T. (2009). *Psychologia zachowań konsumenckich* (2 wyd.). Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.

Fuller T.L. i Fincham F.D. (1995). *Attachment style in married couples: relation to current marital functioning, stability over time, and method of assessment*. „Personal Relationships" 2, 17-34.

Goldstein E.B. (1989). *Sensation and Perception* (trzecie wydanie). Belmont, CA: Wadsworth Publishing Company.

Gragnani A., Rinaldi S., Feichtinger G. (1997). *Cyclic dynamics in romantic relationships.* „International Journal of Bifurcation and Chaos" 7, 2611-2619.

Griffin D.W. i Bartholomew K. (1994). *Models of self and the other. Fundamental dimensions underlying measures of adult attachment*„ Journal of Personality and Social Psychology" 67, 430-445.

Grossberg, S. (1969). *Embedding fields: a theory of learning with physiological implications.* „Journal of Mathematical Psychology" 6, 209-239.

Hull C.L. (1943). *Principles of behavior.* New York: Appleton.

Kozielecki J. (1970). *Konflikt, Teoria Gier i Psychologia.* Warszawa: PWN.

Kullback S. (1959). *Information Theory and Statistics.* New York: Wiley.

Link S.W., Heath R.A. (1975). *A sequential theory of psychological discrimination.* „Psychometrica" 40, 77-105.

Malawski M., Wieczorek A., Sosnowska H. (1997). *Konkurencja i kooperacja: teoria gier w ekonomii i naukach społecznych.* Warszawa: PWN.

Miller G.A. (1956). *The magical number seven, plus or minus two: Some limits on our capacity for processing information.* „Psychological Review" 63, 81-97.

Nowak A., Vallacher R.R. (1998). *Dynamical Social Psychology.* London: Guilford Press.

Roberts F.S. (1979). *Measurement Theory with Applications to Decision making, Utility and the Social Sciences.* London: Addison-Wesley.

Russell B. (1938). *Principles of Mathematics.* New York: Norton.

Shannon C.E. (1948). *A Mathematical Theory of Communication.* „Bell Systems Technical Journal" 27, 379-423, 623-656.

Sobczyk K. (1973). *Metody dynamiki statystycznej.* Warszawa: PWN.

Sobczyk K. (2001). *Information Dynamics: Premises, Challenges and Results.* „Mechanical Systems & Signal Processing" 15(3), 475-498.

Sobczyk K. i Hołobut P. (2011). *Information theoretic approach to dynamics of stochastic systems.* „Probabilistic Engineering Mechanics" vol 26. (w druku).

Sprott J.C. (2004). *Dynamical models of love.* „Nonlinear Dynamics, Psychology and Life Sciences" 8(3), 303-313.

Strelau J. (2000). *Psychologia. Podręcznik akademicki.* (Tom 2). Gdańsk: Gdańskie Wydawnictwo Psychologiczne.

Vallacher R.R., Nowak A. (1994). *Dynamical systems in social psychology.* San Diego, CA: Academic Press.

Wojciszke B. (2004). *Człowiek wśród ludzi. Zarys psychologii społecznej.* Warszawa: Scholar.

On mathematics and psychology

The article is on the mutual relations between mathematics and psychology, with a special emphasis on these mathematical methods which have influenced contemporary research in psychology in the most visible way. These include: mathematical statistics, measurement theory, mathematical information theory (in cognitive psychology), game theory and modelling via differential equations (in dynamical social psychology). It is no doubt that mathematical reasoning in various problems in psychology constitutes an attractive path in the modern psychological research.

Key words: mathematical measurement theory, information theory, game theory, dynamics of psychological processes