PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 4 – 2014

WITOLD ORZESZKO

SYMULACYJNA OCENA ROZMIARU TESTU BDS[1]

1. WPROWADZENIE

Test BDS (Brock i inni, 1987) jest jedną z najważniejszych i najpopularniejszych metod detekcji zależności w szeregach czasowych. Test ten cechuje się wysoką mocą względem zależności nie tylko liniowych, ale przede wszystkim – nieliniowych. Wywodzi się z teorii chaosu lecz, w przeciwieństwie do innych narzędzi detekcji chaotycznych szeregów czasowych, tj. np. wymiaru korelacyjnego, największego wykładnika Lapunowa, czy entropii Kołmogorowa, nie ma na celu identyfikacji określonego atrybutu systemów chaotycznych. Choć BDS ma wysoką moc względem procesów chaotycznych, z natury jest testem uniwersalnym, umożliwiającym detekcję zależności bardzo różnego typu. Badania symulacyjne potwierdziły jego przydatność do identyfikacji zróżnicowanych procesów nieliniowych – zarówno deterministycznych, jak i stochastycznych (np. Brock i inni, 1991; Hsieh, 1991; Liu i inni, 1993; Brock i inni, 1996; Ashley, Patterson, 2001; Diks, 2003; Diks, Panchenko, 2007). Między innymi z tego względu, test BDS jest jednym z najczęściej stosowanych w badaniach empirycznych testów nieliniowości. Również w literaturze ekonometrycznej można znaleźć wiele przykładów zastosowania testu BDS do analizy finansowych i ekonomicznych szeregów czasowych, w tym także szeregów pochodzących z polskiego rynku finansowego (np. Poshokwale, Murinde, 2001; Doman, 2002; Bruzda, 2002; Doman, Doman, 2003, 2004; Orzeszko, 2005; Gurgul, Suder, 2010; Fiszeder, Orzeszko, 2012; Zeug-Żebro, 2013).

Istotnym aspektem oceny jakości każdego testu statystycznego jest analiza jego własności małopróbkowych, w tym zwłaszcza rozmiaru i mocy. W niniejszym artykule, przy zastosowaniu symulacji Monte Carlo, dokonano oceny rozmiaru testu BDS. Symulacje te stanowią uzupełnienie dla badań przeprowadzonych przez innych autorów (np. Brock i inni, 1991; Hsieh, 1991; Kanzler, 1999; Graaff de i inni, 2006; Taylor, 2007). Opublikowane wyniki dotychczasowych badań symulacyjnych potwierdzają dobre własności testu BDS, choć jednocześnie wskazują na pewne jego słabe strony, które powinny być uwzględniane przy interpretacji otrzymywanych wyników.

[1] Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2013/11/B/HS4/00578.

Przykładowo, symulacje przeprowadzone przez W.A. Brocka, D.A. Hsieha oraz B. LeBarona wykazały, że test BDS skutecznie identyfikuje szeregi będące realizacją procesów i.i.d. o rozkładach: normalnym, *t*-Studenta, chi-kwadrat oraz Cauchy'ego, lecz jednocześnie jest on mniej skuteczny w przypadku rozkładu jednostajnego i bimodalnego (Brock i inni, 1991; Hsieh, 1991). Z kolei z badań przeprowadzonych przez L. Kanzlera wynika, że wraz ze wzrostem wartości parametru zanurzenia[2] rozkład statystyki testowej w teście BDS w coraz większym stopniu odbiega od asymptotycznego, tj. standardowego rozkładu normalnego (Kanzler, 1999). Ponadto z badań tych wynika, że rozkład statystyki testowej ma grubsze ogony niż rozkład normalny, co powoduje, że wyznaczanie wartości krytycznych na podstawie rozkładu normalnego prowadzi do zbyt częstego odrzucania hipotezy o braku zależności w badanym procesie (zob. również Taylor, 2007).

Prowadzone badania jednoznacznie wykazują, że test BDS jest wrażliwy na liczbę obserwacji (np. Kanzler, 1999; Graaff de i inni, 2006; Brock i inni, 1991). Brock, Hsieh i LeBaron na podstawie przeprowadzonych symulacji stwierdzili, że wiarygodne wyniki otrzymuje się dla szeregów liczących co najmniej 250 obserwacji (Brock i inni, 1991). Z tego względu, w przypadku odpowiednio krótkich szeregów czasowych, do wyznaczania wartości krytycznych celowe wydaje się zastosowanie metod próbkowania. Metody próbkowania służą do aproksymacji nieznanych rozkładów statystyk poprzez analizę wartości wygenerowanych wielokrotnie z tej samej próby, według określonych zasad. W szczególności, można je stosować do aproksymacji rozkładów statystyk testowych, co w efekcie umożliwia wyznaczenie wartości empirycznego poziomu istotności (ang. *p-value*) oraz wartości krytycznych.

Dokonana w niniejszym artykule ocena rozmiaru testu BDS uwzględnia kwestię doboru metody aproksymacji rozkładu statystyki testowej. Z tego względu do wyznaczenia wartości empirycznych poziomów istotności zastosowano zarówno rozkład asymptotyczny, jak i dwie metody próbkowania: bootstrap oraz technikę permutacji. Badanie przeprowadzono na podstawie szeregów liczb pseudolosowych o różnych długościach, wygenerowanych z rozkładów o zróżnicowanych własnościach.

W dalszej części praca skonstruowana jest następująco: w punkcie drugim scharakteryzowano istotę i konstrukcję testu BDS, w punkcie trzecim zaprezentowano dwie metody próbkowania: bootstrap i technikę permutacji oraz opisano możliwość ich zastosowania w procesie testowania. W czwartym punkcie przedstawiono wyniki symulacji Monte Carlo, natomiast w punkcie piątym podsumowano wyniki przeprowadzonych badań.

[2] Parametry występujące w teście BDS zostały szczegółowo scharakteryzowane w punkcie 2.

2. ISTOTA I KONSTRUKCJA TESTU BDS

Test BDS jest nieparametrycznym testem weryfikującym hipotezę zerową, że badany szereg czasowy jest realizacją procesu i.i.d., tzn. niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Nieparametryczność testu BDS polega na tym, że sformułowana w nim hipoteza alternatywna nie zawiera w sobie parametrycznego modelu opisującego zależności w badanym procesie. Oznacza to, że odrzucenie hipotezy zerowej nie daje w bezpośredni sposób informacji o rodzaju wykrytych zależności. Należy podkreślić, że test BDS identyfikuje zależności zarówno deterministyczne, jak i stochastyczne, a także, że cechuje się wysoką mocą detekcji procesów z nieliniowością – zarówno w średniej, jak i w wariancji. Jednak test wykrywa również zależności liniowe, w związku z czym w celu detekcji nieliniowości, testowaniu należy poddawać szeregi czasowe z wyeliminowanymi zależnościami liniowymi, co w praktyce realizuje się poprzez przefiltrowanie danych odpowiednim modelem ARMA. Warto również wspomnieć, że BDS może być również wykorzystywany do identyfikacji stacjonarności, gdyż dobrze wykrywa trend zarówno w średniej, jak i w wariancji (zob. Brock i inni, 1991, s. 70).

Statystyka testowa w teście BDS oparta jest na całce korelacyjnej, którą dla szeregu czasowego (x_1, x_2,..., x_n) konstruuje się przy zastosowaniu wektorów opóźnień postaci:

$$\hat{x}_t^m = (x_t, x_{t+1}, ..., x_{t+m-1}) \tag{1}$$

i definiuje się wzorem:

$$C_m^T(\varepsilon) = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^{T} I_\varepsilon\left(\hat{x}_t^m, \hat{x}_s^m\right), \tag{2}$$

gdzie zadana liczba $m \in \mathbb{N}$ nazywana jest wymiarem zanurzenia, ε jest ustaloną dodatnią liczbą rzeczywistą, natomiast $T = n - m + 1$ jest liczbą wszystkich wektorów opóźnień.[3] Występująca we wzorze (2) funkcja wskaźnikowa I_ε określona jest wzorem:

$$I_\varepsilon\left(\hat{x}_t^m, \hat{x}_s^m\right) = \begin{cases} 1; & \left\|\hat{x}_t^m - \hat{x}_s^m\right\| < \varepsilon \\ 0; & w\ przeciwnym\ wypadku \end{cases},$$

[3] W literaturze przedmiotu pojęcie całki korelacyjnej stosuje się również w innym znaczeniu: jako granicę $\lim_{T \to \infty} C_m^T(\varepsilon)$.

gdzie $\|\cdot\|$ jest normą „supremum" (tzn. $\|x\| = \sup_{i=1,\dots,m} |x_i|$). Z własności normy supremum wynika, że całkę korelacyjną $C_m^T(\varepsilon)$ można zapisać w postaci:

$$C_m^T(\varepsilon) = \frac{2}{T(T-1)} \sum_{t=1}^{T-1} \sum_{s=t+1}^{T} \prod_{k=0}^{m-1} I_\varepsilon\left(x_{t+k}, x_{s+k}\right), \tag{3}$$

przy czym:

$$I_\varepsilon\left(x_{t+k}, x_{s+k}\right) = \begin{cases} 1; & \left|x_{t+k} - x_{s+k}\right| < \varepsilon \\ 0; & w\ przeciwnym\ wypadku \end{cases}.$$

Całka korelacyjna jest estymatorem prawdopodobieństwa, że dwa losowo wybrane wektory opóźnień przyjmują wartości odległe o mniej niż ε. Jej własności asymptotyczne określone są twierdzeniami dotyczącymi tzw. *U*-statystyk, których szczególnym rodzajem jest całka korelacyjna. Wprowadzone przez Hoeffdinga (1948) pojęcie *U*-statystyki dotyczy jednego z najważniejszych narzędzi estymacji parametrów rozkładu populacji. *U*-statystyką nazywa się statystykę określoną wzorem:

$$U_n = \binom{n}{r}^{-1} \sum_{1 \le t_1 < t_2 < \dots < t_r \le n} h\left(\mathbf{X}_{t_1}, \mathbf{X}_{t_2}, \dots, \mathbf{X}_{t_r}\right), \tag{4}$$

gdzie $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n$ jest zadanym ciągiem niezależnych *m*-wymiarowych wektorów losowych, $r \le n$, natomiast h: $\mathbb{R}^r \to \mathbb{R}$ jest pewną symetryczną, mierzalną funkcją, zwaną jądrem (zob. Hoeffding, 1948; Panchenko, 2006). Gdy wektory $\mathbf{X}_1$, $\mathbf{X}_2,\dots,\mathbf{X}_n$ mają tę samą dystrybuantę *F*, wówczas U_n jest nieobciążonym estymatorem parametru rozkładu populacji:

$$\theta(F) = \int \dots \int h(x_1, x_2, \dots, x_r)\, dF(x_1)\, dF(x_2) \dots dF(x_r).$$

Nietrudno zauważyć, że całka korelacyjna jest *U*-statystyką określoną w przestrzeni *m*-wymiarowych wektorów opóźnień, dla $r = 2$ i funkcji jądra $h(\hat{x}_t^m, \hat{x}_s^m) = I_\varepsilon\left(\hat{x}_t^m, \hat{x}_s^m\right)$.

Statystyka testowa w teście BDS jest funkcją całek korelacyjnych postaci:

$$W_{T,m}(\varepsilon) = \frac{\sqrt{T}\left(C_m^T(\varepsilon) - \left(C_1^T(\varepsilon)\right)^m\right)}{\sigma_{T,m}(\varepsilon)}, \tag{5}$$

gdzie $\sigma_{T,m}(\varepsilon)$ jest czynnikiem normalizującym, którego wzór przedstawiony jest np. w pracy Brock i inni (1991). Odwołując się do asymptotycznych własności *U*-statystyk udowodniono, że w przypadku szeregu czasowego będącego realizacją procesu i.i.d.[4] o niezdegenerowanym rozkładzie, dla każdego $m > 1$ oraz $\varepsilon > 0$ statystyka *W* jest zbieżna według rozkładu do standardowego rozkładu normalnego (Brock i inni, 1991; Brock i inni, 1996).

Jak widać, wartość statystyki *W* zależy od parametrów *m* oraz ε. Z symulacji przeprowadzonych przez Brocka i inni (1991) wynika, że wymiar zanurzenia *m* powinien przyjmować wartości 2, 3, 4, 5 dla krótkich szeregów (do 500 obserwacji) i wartości 2, 3, ..., 10 – dla długich (co najmniej 2000 obserwacji). Z kolei wartości ε powinny znajdować się w zakresie od $0{,}5\hat{\sigma}_x$ do $1{,}5\hat{\sigma}_x$, gdzie $\hat{\sigma}_x$ jest odchyleniem standardowym badanego szeregu. Natomiast z badań przeprowadzonych przez Kanzlera (1999) wynika, że wartość tego parametru powinna zależeć od rozkładu analizowanego procesu. Przykładowo w przypadku szeregów wygenerowanych z rozkładu normalnego lub do niego zbliżonego, należy przyjąć $\varepsilon = 1{,}5\hat{\sigma}_x$ lub $\varepsilon = 2\hat{\sigma}_x$. Kanzler podkreśla, że dobór parametrów w teście może mieć duży wpływ na empiryczny rozmiar testu BDS.

3. TESTY BOOTSTRAPOWE I PERMUTACYJNE

Do wyznaczenia wartości krytycznych oraz empirycznych poziomów istotności niezbędna jest znajomość rozkładu statystyki testowej. Jednak w przypadku wielu testów statystycznych rozkład małopróbkowy ich statystyki testowej nie jest znany. W praktyce powszechnie stosowaną metodą wykorzystywaną w procesie testowania jest aproksymacja rozkładu małopróbkowego rozkładem asymptotycznym. Podejście to wiąże się jednak z określonymi problemami. Przede wszystkim w większości wypadków nieznane jest tempo zbieżności rozkładu małopróbkowego do rozkładu asymptotycznego, co w efekcie oznacza niemożność określenia niezbędnej liczby danych, dla których aproksymacja ta jest wystarczająco dokładna. Ponadto, wiele spośród twierdzeń określających asymptotykę statystyk testowych opartych jest na pewnych założeniach dotyczących rozkładu populacji, które w praktyce mogą nie być spełnione. Warto również dodać, że w niektórych przypadkach mogą wystąpić trudności z wyznaczeniem kwantyli dla rozkładu asymptotycznego. Z powyższych względów coraz większe zainteresowanie wśród statystyków i ekonometryków budzą metody próbkowania, zwane również metodami repróbkowania lub resamplingu.

[4] W celu wyprowadzenia własności asymptotycznych *U*-statystyk Hoeffding (1948) przyjął, że wektory $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, ..., \mathbf{X}_n$ są niezależne o jednakowym rozkładzie (i.i.d.), podczas, gdy Denker, Keller (1983) osłabili to założenie, zastępując warunek niezależności założeniem, że analizowany proces jest absolutnie regularny (ang. *absolutely regular*).

Metody próbkowania są technikami symulacyjnymi, gdyż polegają na analizie wartości statystyk otrzymywanych dla próbek wielokrotnie wygenerowanych z danego szeregu czasowego. Metody te, mimo swojej czasochłonności, są skutecznym narzędziem aproksymacji małopróbkowych rozkładów statystyk testowych, nawet w przypadku stosunkowo małej liczby obserwacji. Ich zastosowanie może prowadzić do dokładniejszego oszacowania empirycznego poziomu istotności i wartości krytycznych rozkładu statystyki testowej w porównaniu z rozkładem asymptotycznym. Przykładowo, w przypadku testów bootstrapowych (polegających na zastosowaniu najpopularniejszej metody repróbkowania, tj. techniki bootstrap), błąd oszacowań empirycznego poziomu istotności dla jednostronnych obszarów krytycznych zwykle jest rzędu $O\left(n^{-1}\right)$, a w niektórych wypadkach nawet $O\left(n^{-1,5}\right)$, podczas, gdy przy wykorzystaniu rozkładów asymptotycznych wynosi on $O\left(n^{-0,5}\right)$, gdzie n jest wielkością próby (Hall, 1992, s. 102–103, s. 178; Davidson, MacKinnon, 1996). W przypadku dwustronnych obszarów krytycznych, błędy te wynoszą, odpowiednio, $O\left(n^{-2}\right)$ i $O\left(n^{-1}\right)$ (por. Härdle i inni, 2003; Horowitz, 2000, s. 29).

W niniejszym artykule rozważono dwie metody próbkowania: bootstrap oraz technikę permutacji. Zgodnie z ideą próbkowania, w metodach tych na podstawie szeregu czasowego $(x_1, x_2,..., x_n)$ generuje się N-krotnie próby, czyli skonstruowane według określonych zasad ciągi wartości $\left(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*\right)$. Zasadnicza różnica między metodą bootstrap a techniką permutacji polega na zastosowaniu innego sposobu tworzenia próbek. W przypadku metody bootstrap procedura generowania próby polega na n-krotnym losowaniu ze zwracaniem jednej spośród obserwacji $(x_1, x_2,..., x_n)$. Natomiast w przypadku techniki permutacyjnej (zwanej również bootstrapem bez powtórzeń) każda próbka $\left(x_1^*, x_2^*,..., x_n^*\right)$ powstaje w wyniku losowania bez zwracania. Oznacza to, że każda z próbek powstaje w wyniku permutacji, tzn. zamiany kolejności oryginalnych danych.

Dalsza procedura postępowania jest w obu metodach identyczna. W pierwszej kolejności dla każdej próby oblicza się wartość analizowanej statystyki testowej. Następnie na podstawie N-elementowego ciągu otrzymanych wartości wyznacza się empiryczny rozkład statystyki testowej, będący podstawą do określenia wartości krytycznych testu oraz empirycznego poziomu istotności. Do wyznaczenia wartości krytycznych zwykle stosuje się metodę percentyli, według której oszacowaniem wartości krytycznej jest odpowiedni percentyl wyznaczonego rozkładu empirycznego. Porównanie wartości statystyki testowej dla szeregu czasowego $(x_1, x_2,..., x_n)$ z wyznaczonymi wartościami krytycznymi umożliwia weryfikację prawdziwości testowanej hipotezy.

Empiryczny poziom istotności (ang. *p-value*) to, z definicji, najmniejszy poziom istotności, przy którym zaobserwowana wartość statystyki testowej prowadzi do odrzucenia hipotezy zerowej. Wynika stąd, że w przypadku prawostronnego obszaru krytycznego empiryczny poziom istotności p to:

$$p = P\left(T \geq t_0 \middle| H_0\right), \tag{6}$$

gdzie t_0 jest wartością statystyki testowej T otrzymaną dla obserwacji $(x_1, x_2,..., x_n)$. W testach bootstrapowych wartość p szacuje się przy wykorzystaniu formuły:

$$\hat{p}_{boot} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\left(t_i^* \geq t_0\right), \tag{7}$$

gdzie I jest funkcją wskaźnikową, natomiast $t_i^*(i = 1,2,...,N)$ są wartościami statystyki testowej dla kolejnych prób bootstrapowych. W przypadku lewostronnego obszaru krytycznego nierówności we wzorach (6) oraz (7) należy zamienić na przeciwne. Bardziej skomplikowana jest kwestia wyznaczania empirycznego poziomu istotności dla dwustronnego obszaru krytycznego. Niektórzy autorzy uważają wręcz, że pojęcie to z natury nie jest odpowiednie dla testów dwustronnych. Inni prezentują różniące się od siebie koncepcje, prowadzące do nierównoważnych definicji (zob. np. Gibbons, Pratt, 1975; Kulinskaya, 2008; Mudholkar, Chaubey, 2009 i cytowana tam literatura). W literaturze przedmiotu często stosuje się koncepcję, w myśl której empiryczny poziom istotności dla dwustronnego obszaru krytycznego jest dwukrotnością empirycznego poziomu istotności dla obszaru jednostronnego. Oznacza to, że w sytuacji, gdy rozkład statystyki testowej jest symetryczny względem zera do obliczenia wartości p można zastosować wzór (7), w którym wartości t_i^* oraz t_0 zamienia się na ich wartości bezwzględne, natomiast w ogólnej sytuacji należy zastosować wzór:

$$\hat{p}_{boot} = 2\min\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\left(t_i^* < t_0\right), \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} I\left(t_i^* \geq t_0\right)\right\}. \tag{8}$$

Zgodnie ze wzorem (8), oszacowaniem empirycznego poziomu istotności jest dwukrotność grubości ogona rozkładu statystyki testowej, w którym znajduje się wyznaczona wartość t_0 (zob. np. MacKinnon, 2009; Rayner i inni, 2009; Davidson, 2012).

4. SYMULACJE MONTE CARLO

W celu oceny rozmiaru testu BDS badaniu poddano szeregi liczb pseudolosowych wygenerowanych z siedmiu rozkładów o zróżnicowanych własnościach: normalnego $N(0,1)$, jednostajnego $U(0,1)$, t-Studenta $t(3)$ i $t(10)$, chi-kwadrat $\chi^2(2)$ i $\chi^2(4)$ oraz gamma $G(5,1)$.[5] Z każdego rozkładu wygenerowano po $N_{MC} = 1000$ replikacji złożonych z, kolejno, $n = 300$, 500, 700 i 1000 obserwacji. Dla każdej z replikacji, empiryczne poziomy istotności wyznaczono przy zastosowaniu trzech metod: rozkładu asymptotycznego, bootstrap oraz metody permutacji. W przypadku obu zastosowanych metod próbkowania skonstruowano $N = 1000$ próbek (dla każdej z replikacji osobno). W teście BDS przyjęto $\varepsilon = 1{,}5\hat{\sigma}_x$, gdzie $\hat{\sigma}_x$ jest odchyleniem standardowym badanego szeregu, a także cztery wartości wymiaru zanurzenia: $m = 2,3,4,5$. Obliczenia wykonano w środowisku Matlab.[6]

W tabelach Z1-Z28 w Załączniku zaprezentowano otrzymane wyniki badań. Dla każdego z zastosowanych rozkładów, każdej rozważonej długości szeregu oraz każdej wartości wymiaru zanurzenia m, empiryczny rozmiar testu α_{emp} obliczono jako odsetek z 1000 replikacji Monte Carlo, dla których na podstawie wyznaczonych empirycznych poziomów istotności odrzucono hipotezę zerową przy poziomach istotności równych, kolejno, $\alpha = 0{,}01$; 0,05; 0,1. W celu formalnego zweryfikowania istotności różnicy między empirycznym rozmiarem testu a przyjętą wartością α zastosowano test dla wskaźnika struktury.[7] W teście tym weryfikacji podlega hipoteza:

$$H_0\colon \alpha_{emp} = \alpha,$$

względem alternatywnej:

$$H_1\colon \alpha_{emp} \neq \alpha.$$

Jak wiadomo, przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej empiryczny rozmiar testu α_{emp} ma asymptotyczny rozkład normalny $N\left(\alpha, \frac{\alpha(1-\alpha)}{N_{MC}}\right)$. W tabelach Z1-Z28 pogrubiono te spośród obliczonych wartości α_{emp}, które w świetle testu dla wskaźnika struktury istotnie różniły się od α, przy czym symbole *, **, *** oznaczają odrzucenie H_0 na poziomie istotności, odpowiednio, 0,1, 0,05 i 0,01.

Otrzymane rezultaty przeprowadzonych badań wskazują, że w przypadku zastosowania rozkładu asymptotycznego, empiryczny rozmiar testu BDS istotnie zależy od rodzaju rozkładu procesu generującego, dostępnej liczby obserwacji, a także przyjętej wartości wymiaru zanurzenia m. Jak widać, największa różnica między rozmiarem empirycznym a zadanym poziomem istotności ma miejsce dla rozkładu jednostajnego,

---

[5] Badane szeregi zostały wygenerowane w programie Gretl 1.9.4.

[6] Przy tworzeniu kodu komputerowego wykorzystano procedurę do obliczania wartości statystyki *W*, napisaną przez L. Kanzlera.

[7] Empiryczny rozmiar testu jest w istocie pewnym wskaźnikiem struktury w populacji o rozkładzie zero-jedynkowym, gdyż określa frakcję badanych replikacji Monte Carlo, dla których empiryczny poziom istotności jest nie większy od zadanej wartości poziomu istotności.

a także dla rozkładu gamma. W przypadku wszystkich rozkładów rozmiar testu BDS zależy w dużym stopniu od długości szeregu czasowego. Dla szeregów krótkich, tj. złożonych z n = 300 oraz n = 500 obserwacji, jedynie dla rozkładów $t(3)$ i $\chi^2(4)$ można uznać, że test ma poprawny rozmiar. W pozostałych przypadkach empiryczny rozmiar testu BDS jest istotnie większy od zadanego poziomu istotności, co oznacza, że zbyt często następuje odrzucenie hipotezy zerowej. Własność ta szczególnie zauważalna jest dla większych wartości wymiaru zanurzenia m oraz dla większych wartości α.

Dużo lepsze rezultaty otrzymano w wyniku zastosowania metod próbkowania, choć również wtedy można zaobserwować przypadki odrzucenia hipotezy o równości rozmiaru empirycznego i zadanego poziomu istotności. Sytuacja ta widoczna jest zwłaszcza w przypadku rozkładów: $N(0,1)$ dla n = 700 i n = 1000, $t(3)$ dla n = 700, $t(10)$ dla n = 300 i n = 500, $\chi^2(2)$ dla n = 500, $\chi^2(4)$ dla n = 500 i n = 700 oraz $G(5,1)$ dla n = 300, n = 500 i n = 700. Jednak należy podkreślić, że w zdecydowanej większości przypadków zastosowanie metod próbkowania spowodowało, że empiryczny rozmiar testu BDS jest bardziej zbliżony do przyjętego poziomu istotności, niż w przypadku zastosowania rozkładu asymptotycznego.

W celu porównania ze sobą obu zastosowanych metod próbkowania w tabeli 1 podsumowano, w ilu wypadkach dana metoda okazała się lepsza, tzn. doprowadziła do rozmiaru empirycznego α_{emp} bliższego zadanemu poziomowi istotności α.

Tabela 1.

Porównanie efektywności zastosowanych metod próbkowania

Długość szeregu	Metoda próbkowania	
	metoda bootstrap	metoda permutacji
n = 300	29	44
n = 500	35	39
n = 700	37	35
n = 1000	43	36
Suma	**144**	**154**

Uwagi: W tabeli podsumowano, w ilu wypadkach dana metoda próbkowania prowadziła do rozmiaru empirycznego bliższego zadanemu poziomowi istotności. W tym celu, dla każdego n porównano ze sobą 4 x 3 x 7 = 84 empirycznych rozmiarów testu zestawionych w tabelach Z1-Z28. Wartości z poszczególnych wierszy tabeli 1 nie sumują się do 84, gdyż w niektórych przypadkach obie metody prowadziły do rozmiaru empirycznego jednakowo odległego od zadanego poziomu istotności.
Źródło: opracowanie własne na podstawie tabel Z1-Z28.

Jak widać z tabeli 1 metoda permutacji prowadziła do nieco lepszych wyników niż bootstrap. Jednak warto podkreślić, że przewaga metody permutacji maleje wraz ze wzrostem liczby obserwacji w analizowanym szeregu. W przypadku n = 700 i n = 1000 lepsze rezultaty osiągnięto przy zastosowaniu techniki bootstrap.

5. PODSUMOWANIE WYNIKÓW BADAŃ

Z przeprowadzonych symulacji Monte Carlo wynika, że empiryczny rozmiar testu BDS zależy od rodzaju rozkładu procesu generującego, długości analizowanego szeregu czasowego, a także przyjętej w teście wartości wymiaru zanurzenia *m*. Największa różnica między rozmiarem empirycznym a zadanym poziomem istotności ma miejsce dla rozkładu jednostajnego $U(0,1)$ oraz dla rozkładu gamma $G(5,1)$. W przypadku wszystkich rozważonych rozkładów, tj. również: normalnego $N(0,1)$, *t*-Studenta $t(3)$ i $t(10)$ oraz chi-kwadrat $\chi^2(2)$ i $\chi^2(4)$ rozmiar testu w dużym stopniu zależy od długości badanego szeregu czasowego. Dla szeregów krótkich, tj. złożonych z $n = 300$ oraz $n = 500$ obserwacji, jedynie dla rozkładów $t(3)$ i $\chi^2(4)$ można uznać, że test ma poprawny rozmiar. W pozostałych przypadkach empiryczny rozmiar testu BDS jest większy od zadanego poziomu istotności, co oznacza, że zbyt często następuje odrzucenie hipotezy, że badany szereg jest realizacją procesu i.i.d. Własność ta szczególnie widoczna jest dla większych spośród uwzględnionych w badaniu wartości wymiaru zanurzenia *m*.

W badaniu uwzględniono trzy sposoby aproksymacji rozkładu statystyki testowej: klasyczny – polegający na zastosowaniu asymptotycznego rozkładu normalnego oraz dwie metody próbkowania – bootstrap oraz metodę permutacji. Porównując różnice między empirycznymi rozmiarami testu a założonymi poziomami istotności, należy stwierdzić, że w przypadku szeregów złożonych z 300 oraz 500 obserwacji, metody próbkowania okazały się lepszym narzędziem aproksymacji rozkładu statystyki testowej niż rozkład asymptotyczny. Warto również dodać, że z przeprowadzonego badania wynika, że wybór metody próbkowania powinien zależeć od długości badanego szeregu czasowego. W przypadku szeregów krótkich ($n = 300$ i $n = 500$) lepsze rezultaty otrzymano przy zastosowaniu metody permutacji, natomiast w przypadku szeregów dłuższych ($n = 700$ i $n = 1000$) – przy zastosowaniu techniki bootstrap.

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

LITERATURA

Ashley R. A., Patterson D. M., (2001), Nonlinear Model Specification/Diagnostics: Insights from a Battery of Nonlinearity Tests, *working paper*, Virginia Tech.

Brock W. A., Dechert W. D., Scheinkman J. A., (1987), A Test for Independence Based on the Correlation Dimension, *working paper*, University of Wisconsin, Madison.

Brock W. A., Hsieh D. A., LeBaron B., (1991), *Nonlinear Dynamics, Chaos, and Instability: Statistical Theory and Economic Evidence*, The MIT Press, Cambridge, Massachusetts, London, England.

Brock W. A., Scheinkman J. A., Dechert W. D., LeBaron B., (1996), A Test for Independence Based on the Correlation Dimension, *Econometric Reviews*, 15 (3), 197– 235.

Davidson R., (2012), *The Bootstrap in Econometrics*, McGill University, Quebec.

Davidson R., MacKinnon J. G., (1996), The Size Distortion of Bootstrap Tests, *working paper*, Queen's University, Kingston.

Denker M., Keller G., (1983), On U-Statistics and von Mises' Statistics for Weakly Dependent Processes, *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete*, 64, 505–522.

Diks C., (2003), Detecting Serial Dependence in Tail Events: a Test Dual to the BDS Test, *Economics Letters*, 79 (3), 319–324.

Diks C., Panchenko V., (2007), Nonparametric Tests for Serial Independence Based on Quadratic Forms, *Statistica Sinica*, 17, 81–98.

Doman M., Doman R., (2003), Nieliniowość w szeregach zwrotów akcji notowanych na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie, *Zeszyty Naukowe Akademii Ekonomicznej w Poznaniu*, 27, 37–51.

Doman M., Doman R., (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, Poznań.

Doman R., (2002), Nieliniowość w zwrotach kursów wymiany złotego, w: Tarczyński W., (red.), *Rynek kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, Szczecin, 385–396.

Fiszeder P., Orzeszko W., (2012), Nonparametric Verification of GARCH-Class Models for Selected Polish Exchange Rates and Stock Indices, *Finance a úvěr – Czech Journal of Economics and Finance*, 62 (5), 430–449.

Gibbons J.D., Pratt J.W., (1975), *P*-Values: Interpretation and Methodology, *The American Statistician*, 29 (1), 20–25.

Graaff de T., Montfort van K., Nijkamp P., (2006), Spatial Effects and Non-Linearity in Spatial Regression Models: Simulation Results for Several Misspecification Tests, w: Reggiani A., Nijkamp P., (red.), *Spatial Dynamics, Networks and Modelling*, Edward Elgar Publishing Limited, Bodmin, Cornwall, 91–117.

Gurgul H., Suder M., (2010), Nieliniowa dynamika indeksów giełdowych WIG20 i ATX: analiza porównawcza, *Ekonomia Menedżerska*, 7, 103–120.

Hall P., (1992), *The Bootstrap and Edgeworth Expansion*, Springer-Verlag, New York.

Härdle W, Horowitz J., Kreiss J.-P., (2003), Bootstrap Methods for Time Series, *International Statistical Review*, 71, 435–459.

Hoeffding W., (1948), A Class of Statistics with Asymptotically Normal Distribution, *The Annals of Mathematical Statistics*, 19, 293–325.

Horowitz J. L., (2000), *The Bootstrap*, Department of Economics, University of Iowa, Iowa City.

Hsieh D., (1991), Chaos and Nonlinear Dynamics Application to Financial Markets, *The Journal of Finance*, 46 (5), 1839–1877.

Kanzler L., (1999), Very Fast and Correctly Sized Estimation of the BDS Statistic, Department of Economics, Oxford University.

Kulinskaya E., (2008), On Two-sided *P*-values for Non-symmetric Distributions, *working paper*, Imperial College, London.

Liu T., Granger C. W. J., Heller W. P., (1993), Using the Correlation Exponent to Decide whether an Economic Series is Chaotic, w: Pesaran H. M., Potter S. M., (red.), *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*, John Wiley & Sons, Chichester, 17–32.

MacKinnon J. G., (2009), Bootstrap Hypothesis Testing, w: Belsley D. A., Kontoghiorghes E. J., (red.), *Handbook of Computational Econometrics*, John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 183–214.

Mizrach B., (1994), Using U-statistics to Detect Business Cycle Nonlinearities, w: Semmler W., (red.), *Business Cycles: Theory and Empirical Investigation*, Kluwer Press, Boston, 107–129.

Mudholkar G. S., Chaubey Y. P., (2009), On Defining *P*-values, *Statistics and Probability Letters*, 79, 1963–1971.

Orzeszko W., (2005), *Identyfikacja i prognozowanie chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych*, seria: Nowe Trendy w Naukach Ekonomicznych, Fundacja Promocji i Akredytacji Kierunków Ekonomicznych, Polskie Towarzystwo Ekonomiczne, Warszawa.

Panchenko V., (2006), Nonparametric Methods in Economics and Finance: Dependence, Causality and Prediction, *PhD Thesis*, The University of Amsterdam.

Poshokwale S., Murinde V., (2001), Modelling the Volatility in East European Emerging Stock Markets: Evidence on Hungary and Poland, *Applied Financial Economics*, 11, 445–456.

Rayner J. C. W., Thas O., Best D. J., (2009), *Smooth Tests of Goodness of Fit: Using R*, 2nd Edition, John Wiley & Sons (Asia) Pte Ltd, 247.

Taylor S.J., (2007), *Asset Price Dynamics, Volatility, and Prediction*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey.

Zeug-Żebro K., (2013), Badanie wpływu redukcji poziomu szumu losowego na identyfikację chaosu deterministycznego w ekonomicznych szeregach czasowych, w: Mika J., Zeug-Żebro K., (red.), *Zastosowanie metod matematycznych w ekonomii i zarządzaniu*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach, Katowice, 124–135.

ZAŁĄCZNIK
EMPIRYCZNY ROZKŁAD TESTU BDS – WYNIKI SYMULACJI MONTE CARLO

Tabela Z1.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu *N*(0,1). Liczba obserwacji *n* = 300

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia *m***			
	***m* = 2**	***m* = 3**	***m* = 4**	***m* = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	1,4%	**1,7%****	**2,0%*****
α = 0,05	5,6%	**6,3%***	**7,1%*****	**8,0%*****
α = 0,1	**11,9%****	**13,0%*****	**13,4%*****	**13,7%*****
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,7%	0,9%	1,3%	1,2%
α = 0,05	**3,7%***	4,5%	5,8%	5,8%
α = 0,1	8,9%	9,7%	11,3%	10,7%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,7%	0,8%	1,1%	1,3%
α = 0,05	3,9%	4,0%	5,6%	5,6%
α = 0,1	9,2%	9,2%	10,9%	10,6%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z2.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu *N*(0,1). Liczba obserwacji *n* = 500

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia *m***			
	***m* = 2**	***m* = 3**	***m* = 4**	***m* = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,5%	1,4%	**2,5%*****	**1,8%****
α = 0,05	5,5%	**6,7%****	**6,9%*****	**6,6%****
α = 0,1	**12,3%****	**12,0%****	**12,3%****	**13,7%*****
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,2%	1,4%	**1,8%****	1,1%
α = 0,05	5,0%	5,7%	6,0%	6,0%
α = 0,1	10,0%	10,9%	11,3%	**12,0%****
metoda permutacji				
α = 0,01	1,5%	1,3%	**1,6%***	1,4%
α = 0,05	5,2%	5,5%	**6,2%***	5,8%
α = 0,1	10,2%	11,3%	10,8%	11,2%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z3.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $N(0,1)$. Liczba obserwacji n = 700

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	**2,0%***	**1,8%**	**1,8%**	**1,6%*
α = 0,05	**6,9%***	6,1%	**6,7%**	**6,8%***
α = 0,1	**12,2%**	**11,8%*	**12,0%**	11,2%
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,4%	**2,0%***	**1,9%***	**1,9%***
α = 0,05	**6,2%*	5,5%	6,0%	**6,4%**
α = 0,1	11,3%	10,6%	10,6%	10,5%
metoda permutacji				
α = 0,01	**1,7%**	1,3%	1,4%	**1,6%*
α = 0,05	6,1%	5,7%	**6,4%**	**6,3%*
α = 0,1	11,2%	10,6%	10,7%	10,5%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z4.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $N(0,1)$. Liczba obserwacji n = 1000

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	**2,0%***	**2,4%***	**2,1%***	**2,2%***
α = 0,05	5,8%	6,1%	**7,4%***	**7,1%***
α = 0,1	11,3%	**11,7%*	**11,9%**	**12,7%***
metoda bootstrap				
α = 0,01	**1,8%**	**2,2%***	**1,9%***	**2,0%***
α = 0,05	5,9%	5,6%	**7,1%***	**6,9%***
α = 0,1	10,3%	11,0%	**11,7%*	11,4%
metoda permutacji				
α = 0,01	**1,9%***	**2,2%***	**2,0%***	**1,8%**
α = 0,05	5,7%	5,7%	**7,1%***	**7,2%***
α = 0,1	10,8%	10,6%	11,2%	**11,9%**

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z5.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $U(0,1)$. Liczba obserwacji $n = 300$

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	$m = 2$	**$m = 3$**	**$m = 4$**	**$m = 5$**
rozkład asymptotyczny				
$\alpha = 0,01$	**3,6%*** **	**4,0%*** **	**4,4%*** **	**4,0%*** **
$\alpha = 0,05$	**11,3%*** **	**10,9%*** **	**9,7%*** **	**10,6%*** **
$\alpha = 0,1$	**18,8%*** **	**18,0%*** **	**17,6%*** **	**17,5%*** **
metoda bootstrap				
$\alpha = 0,01$	1,1%	1,5%	1,5%	1,3%
$\alpha = 0,05$	**6,2%* **	**6,3%* **	5,9%	6,0%
$\alpha = 0,1$	**11,6%* **	11,1%	10,1%	11,2%
metoda permutacji				
$\alpha = 0,01$	1,4%	**1,6%* **	**1,6%* **	**1,6%* **
$\alpha = 0,05$	**6,2%* **	5,9%	5,8%	5,7%
$\alpha = 0,1$	**11,6%* **	10,8%	9,9%	10,6%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z6.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $U(0,1)$. Liczba obserwacji $n = 500$

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	$m = 2$	**$m = 3$**	**$m = 4$**	**$m = 5$**
rozkład asymptotyczny				
$\alpha = 0,01$	**2,6%*** **	**2,2%*** **	**2,2%*** **	**2,1%*** **
$\alpha = 0,05$	**8,3%*** **	**9,0%*** **	**7,8%*** **	**7,3%*** **
$\alpha = 0,1$	**13,6%*** **	**14,3%*** **	**14,2%*** **	**12,5%*** **
metoda bootstrap				
$\alpha = 0,01$	1,5%	1,3%	0,9%	1,1%
$\alpha = 0,05$	5,7%	5,7%	5,0%	5,4%
$\alpha = 0,1$	11,0%	10,4%	10,4%	9,6%
metoda permutacji				
$\alpha = 0,01$	**1,8%** **	1,5%	0,9%	1,3%
$\alpha = 0,05$	5,6%	5,7%	5,2%	5,3%
$\alpha = 0,1$	10,5%	10,6%	10,2%	9,2%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z7.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $U(0,1)$. Liczba obserwacji $n = 700$

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	**1,9%*** **	1,3%	**1,7%** **	**1,8%** **
α = 0,05	**8,4%*** **	**7,6%*** **	**7,0%*** **	**7,5%*** **
α = 0,1	**15,1%*** **	**14,9%*** **	**14,0%*** **	**13,7%*** **
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,4%	1,2%	1,4%	1,3%
α = 0,05	6,0%	5,7%	5,4%	5,2%
α = 0,1	**11,7%***	**11,6%***	11,2%	**11,7%***
metoda permutacji				
α = 0,01	1,2%	1,3%	1,4%	1,1%
α = 0,05	**6,6%** **	5,8%	5,6%	5,7%
α = 0,1	**11,6%***	**11,6%***	11,4%	10,8%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z8.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $U(0,1)$. Liczba obserwacji $n = 1000$

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,5%	1,5%	0,9%	1,3%
α = 0,05	**7,1%*** **	**7,1%*** **	**6,4%** **	**6,9%*** **
α = 0,1	**12,9%*** **	**13,0%*** **	**13,4%*** **	**13,4%*** **
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,0%	0,5%	1,0%	0,9%
α = 0,05	5,6%	5,0%	4,8%	5,2%
α = 0,1	11,2%	**11,6%***	10,9%	10,7%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,2%	0,7%	0,6%	0,8%
α = 0,05	5,9%	5,3%	5,0%	5,0%
α = 0,1	11,1%	11,3%	10,3%	10,9%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z9.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(3)$. Liczba obserwacji n = 300

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia *m***			
	***m* = 2**	***m* = 3**	***m* = 4**	***m* = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	1,2%	1,3%	1,2%
α = 0,05	5,6%	5,4%	**6,6%****	5,7%
α = 0,1	10,9%	11,3%	11,2%	**12,0%****
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,0%	0,8%	1,0%	0,8%
α = 0,05	4,8%	4,8%	5,2%	4,4%
α = 0,1	9,5%	9,8%	10,0%	10,0%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,9%	1,1%	1,2%	0,8%
α = 0,05	4,6%	4,9%	5,0%	4,7%
α = 0,1	9,2%	9,6%	10,1%	10,3%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z10.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(3)$. Liczba obserwacji n = 500

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia *m***			
	***m* = 2**	***m* = 3**	***m* = 4**	***m* = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,6%	1,1%	0,8%	1,0%
α = 0,05	3,9%	4,5%	4,7%	5,7%
α = 0,1	9,4%	8,9%	10,8%	10,6%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,8%	1,0%	0,9%	1,4%
α = 0,05	3,9%	4,1%	3,9%	4,6%
α = 0,1	8,6%	**7,9%****	9,7%	9,3%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,6%	0,9%	0,7%	1,4%
α = 0,05	**3,4%****	4,2%	4,0%	4,7%
α = 0,1	8,6%	**8,1%****	9,6%	10,2%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z11.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(3)$. Liczba obserwacji n = 700

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia *m***			
	***m* = 2**	***m* = 3**	***m* = 4**	***m* = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,6%	0,7%	0,9%	1,0%
α = 0,05	4,1%	4,5%	3,9%	4,2%
α = 0,1	9,5%	**8,2%***	**8,2%***	**8,0%****
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,6%	0,9%	1,0%	1,2%
α = 0,05	3,9%	4,3%	**3,7%***	3,9%
α = 0,1	8,8%	**8,0%****	**7,6%****	**7,8%****
metoda permutacji				
α = 0,01	0,7%	0,7%	1,0%	1,3%
α = 0,05	4,1%	**3,5%****	**3,6%****	**3,8%***
α = 0,1	8,7%	**7,7%****	**7,4%*****	**7,6%****

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z12.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(3)$. Liczba obserwacji n = 1000

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia *m***			
	***m* = 2**	***m* = 3**	***m* = 4**	***m* = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	0,6%	0,7%	1,1%
α = 0,05	4,3%	4,4%	4,2%	3,9%
α = 0,1	**8,2%***	9,4%	9,1%	10,5%
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,3%	0,9%	0,8%	1,0%
α = 0,05	3,9%	4,3%	4,0%	**3,8%***
α = 0,1	**7,7%****	8,8%	8,8%	9,4%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,1%	0,8%	0,9%	0,9%
α = 0,05	**3,7%***	4,7%	**3,6%****	**3,7%***
α = 0,1	**7,5%*****	9,0%	8,8%	9,2%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z13.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(10)$. Liczba obserwacji n = 300

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	**2,1%*** **	**2,1%*** **	**1,9%*** **	**1,7%** **
α = 0,05	**6,7%** **	**6,8%*** **	**6,6%** **	**7,9%*** **
α = 0,1	**13,9%*** **	**14,3%*** **	**13,2%*** **	**13,3%*** **
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,3%	1,4%	**1,7%** **	**1,7%** **
α = 0,05	5,6%	5,7%	5,4%	**6,2%* **
α = 0,1	**11,8%* **	**12,0%** **	10,5%	11,3%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,4%	**1,7%** **	1,5%	**1,7%** **
α = 0,05	5,6%	5,7%	5,1%	5,7%
α = 0,1	11,4%	10,8%	11,0%	11,1%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z14.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(10)$. Liczba obserwacji n = 500

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	**1,9%*** **	**1,8%** **	**1,9%*** **	**2,0%*** **
α = 0,05	**6,2%* **	**7,2%*** **	**6,3%* **	**7,0%*** **
α = 0,1	11,3%	**11,7%* **	**12,2%** **	**12,2%** **
metoda bootstrap				
α = 0,01	**2,2%*** **	**1,6%* **	**1,6%* **	**2,0%*** **
α = 0,05	5,8%	**6,7%** **	5,9%	**6,4%** **
α = 0,1	9,6%	10,7%	11,3%	11,2%
metoda permutacji				
α = 0,01	**1,8%** **	**1,6%* **	**1,8%** **	**2,2%*** **
α = 0,05	5,9%	**6,5%** **	5,7%	**6,2%* **
α = 0,1	10,0%	11,1%	10,6%	11,3%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z15.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(10)$. Liczba obserwacji n = 700

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,0%	1,3%	1,3%	1,4%
α = 0,05	4,8%	5,4%	5,3%	5,1%
α = 0,1	10,8%	10,0%	9,5%	9,8%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,9%	1,5%	1,3%	1,5%
α = 0,05	4,3%	5,0%	4,4%	5,1%
α = 0,1	9,6%	9,2%	8,8%	9,6%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,9%	1,4%	1,3%	1,4%
α = 0,05	4,4%	5,1%	4,8%	4,8%
α = 0,1	9,7%	9,4%	8,6%	9,4%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z16.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $t(10)$. Liczba obserwacji n = 1000

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	1,0%	1,2%	1,2%
α = 0,05	5,2%	5,7%	4,7%	4,8%
α = 0,1	10,0%	11,2%	10,8%	10,8%
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,5%	1,4%	1,1%	1,1%
α = 0,05	5,2%	5,3%	4,4%	5,3%
α = 0,1	9,7%	10,6%	10,5%	10,0%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,4%	1,2%	1,2%	1,3%
α = 0,05	5,0%	5,7%	4,8%	4,8%
α = 0,1	9,6%	9,8%	10,4%	10,4%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z17.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(2)$. Liczba obserwacji n = 300

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	**1,7%****	**1,8%****	**1,7%****
α = 0,05	6,1%	**6,5%****	**7,2%*****	**6,5%****
α = 0,1	**12,3%****	**13,0%*****	**12,5%*****	**12,8%*****
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,6%	**1,6%***	1,4%	**1,6%***
α = 0,05	5,6%	5,6%	**6,3%***	5,9%
α = 0,1	10,6%	11,1%	11,4%	**11,8%***
metoda permutacji				
α = 0,01	0,8%	1,0%	1,4%	1,3%
α = 0,05	5,3%	5,8%	5,9%	5,8%
α = 0,1	11,3%	11,3%	11,5%	11,3%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z18.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(2)$. Liczba obserwacji n = 500

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,4%	1,3%	1,1%	0,9%
α = 0,05	5,3%	**7,3%*****	**7,3%*****	**7,1%*****
α = 0,1	**12,6%*****	**12,4%****	**12,7%*****	**12,5%****
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,3%	1,1%	0,9%	1,0%
α = 0,05	5,4%	**6,4%****	**6,5%****	**6,5%****
α = 0,1	**11,6%***	**12,3%****	**11,8%***	**12,2%****
metoda permutacji				
α = 0,01	1,2%	1,0%	0,9%	0,8%
α = 0,05	4,8%	**7,2%*****	**6,2%***	**6,7%****
α = 0,1	**11,9%****	**11,8%***	**12,9%*****	**12,1%****

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z19.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(2)$. Liczba obserwacji n = 700

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,9%	1,2%	0,9%	0,8%
α = 0,05	**6,2%***	5,3%	5,0%	5,1%
α = 0,1	**11,7%***	**11,6%***	10,4%	10,5%
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,2%	1,4%	0,9%	0,6%
α = 0,05	5,9%	5,6%	5,1%	5,3%
α = 0,1	11,3%	11,0%	10,0%	10,2%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,0%	1,3%	0,9%	0,8%
α = 0,05	6,1%	5,1%	5,0%	5,2%
α = 0,1	11,0%	11,0%	9,8%	10,0%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z20.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(2)$. Liczba obserwacji n = 1000

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,9%	1,3%	1,1%	1,0%
α = 0,05	5,1%	5,5%	4,9%	5,2%
α = 0,1	**11,7%***	10,9%	10,6%	10,2%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,8%	1,3%	1,2%	0,8%
α = 0,05	4,8%	5,0%	4,8%	5,1%
α = 0,1	10,8%	10,3%	9,8%	9,6%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,9%	1,5%	1,1%	1,0%
α = 0,05	4,7%	4,9%	5,1%	5,2%
α = 0,1	10,7%	10,5%	10,8%	10,2%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z21.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(4)$. Liczba obserwacji n = 300

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	1,4%	1,1%	1,2%
α = 0,05	4,0%	5,9%	**6,4%****	6,0%
α = 0,1	10,4%	10,6%	11,3%	11,3%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,7%	1,3%	1,1%	1,3%
α = 0,05	**3,4%****	5,2%	5,4%	4,6%
α = 0,1	**7,8%****	9,4%	10,0%	10,6%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,1%	0,9%	1,0%	1,1%
α = 0,05	**3,7%***	4,6%	5,0%	4,9%
α = 0,1	**7,9%****	9,0%	9,7%	9,9%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z22.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(4)$. Liczba obserwacji n = 500

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,8%	1,1%	1,1%	1,2%
α = 0,05	**3,4%****	4,4%	4,4%	4,4%
α = 0,1	9,3%	9,3%	9,8%	10,1%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,7%	0,8%	0,9%	1,1%
α = 0,05	**2,9%*****	**3,6%****	**3,5%****	4,4%
α = 0,1	**8,4%***	**8,3%***	8,5%	8,6%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,8%	0,8%	1,0%	1,2%
α = 0,05	**3,1%*****	3,9%	4,1%	4,2%
α = 0,1	**8,3%***	8,7%	8,9%	8,9%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z23.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(4)$. Liczba obserwacji n = 700

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,8%	0,7%	1,1%	1,2%
α = 0,05	**3,6%****	3,9%	4,7%	4,5%
α = 0,1	8,5%	**7,7%****	8,8%	9,2%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,7%	1,0%	1,1%	1,3%
α = 0,05	**3,5%****	3,9%	4,6%	4,5%
α = 0,1	**7,8%****	**7,0%*****	8,5%	**8,4%***
metoda permutacji				
α = 0,01	0,8%	1,0%	1,5%	1,4%
α = 0,05	**3,7%***	3,9%	4,1%	4,4%
α = 0,1	**8,3%***	**7,6%****	**8,4%***	9,1%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z24.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $\chi^2(4)$. Liczba obserwacji n = 1000

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	0,5%	0,8%	1,4%	1,5%
α = 0,05	4,4%	4,4%	4,1%	5,0%
α = 0,1	8,7%	8,5%	9,2%	9,5%
metoda bootstrap				
α = 0,01	0,6%	0,6%	**1,6%***	**1,7%****
α = 0,05	**3,8%***	4,3%	4,3%	4,8%
α = 0,1	8,6%	**8,1%****	8,7%	9,0%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,0%	0,7%	**1,6%***	**1,8%****
α = 0,05	3,9%	4,4%	3,9%	4,6%
α = 0,1	**8,3%***	8,6%	8,8%	9,1%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z25.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu G(5,1). Liczba obserwacji n = 300

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m **= 2**	m **= 3**	m **= 4**	m **= 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,5%	**2,2%*****	**2,0%*****	**1,7%****
α = 0,05	**7,1%*****	**8,0%*****	**7,3%*****	**7,5%*****
α = 0,1	**13,3%*****	**14,6%*****	**14,6%*****	**13,8%*****
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,3%	1,4%	**2,0%*****	**1,6%***
α = 0,05	4,8%	**6,2%***	**6,4%****	6,1%
α = 0,1	10,3%	**12,4%****	**11,9%****	11,0%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,3%	**1,6%***	**1,7%****	**1,7%****
α = 0,05	5,0%	**6,2%***	**6,2%***	5,8%
α = 0,1	11,1%	**12,0%****	**11,6%***	11,4%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z26.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu G(5,1). Liczba obserwacji n = 500

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m **= 2**	m **= 3**	m **= 4**	m **= 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,2%	1,4%	**1,6%***	**1,8%****
α = 0,05	6,0%	**7,3%*****	**6,4%****	**6,6%****
α = 0,1	**12,0%****	**13,0%*****	**13,4%*****	**12,8%*****
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,3%	1,4%	**1,7%****	**1,7%****
α = 0,05	4,4%	**6,3%***	5,7%	5,6%
α = 0,1	10,7%	**11,9%****	11,4%	11,3%
metoda permutacji				
α = 0,01	0,9%	**1,6%***	1,2%	**1,8%****
α = 0,05	5,1%	**6,6%****	5,7%	5,8%
α = 0,1	10,7%	**11,7%***	**11,9%****	11,3%

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z27.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $G(5,1)$. Liczba obserwacji n = 700

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,1%	**1,6%***	**1,7%****	**1,7%****
α = 0,05	**6,5%****	**6,3%***	**6,3%***	**7,0%*****
α = 0,1	**12,3%****	**11,8%***	**12,0%****	**12,5%*****
metoda bootstrap				
α = 0,01	1,4%	**1,7%****	1,3%	1,5%
α = 0,05	**6,2%***	6,0%	**6,2%***	**6,7%****
α = 0,1	11,3%	11,1%	11,1%	**11,6%***
metoda permutacji				
α = 0,01	0,9%	1,3%	1,3%	**1,6%***
α = 0,05	**6,4%****	**6,4%****	5,9%	**7,0%*****
α = 0,1	**11,8%***	11,0%	11,2%	**11,9%****

Źródło: obliczenia własne.

Tabela Z28.

Empiryczny rozmiar testu dla rozkładu $G(5,1)$. Liczba obserwacji n = 1000

Poziom istotności α	**Wymiar zanurzenia m**			
	m = 2	**m = 3**	**m = 4**	**m = 5**
rozkład asymptotyczny				
α = 0,01	1,5%	**1,6%***	1,5%	**1,6%***
α = 0,05	6,0%	6,0%	5,9%	6,0%
α = 0,1	10,9%	11,4%	11,3%	**11,6%***
metoda bootstrap				
α = 0,01	**1,7%****	**1,7%****	1,2%	1,4%
α = 0,05	5,8%	5,5%	5,5%	5,6%
α = 0,1	10,4%	10,2%	10,2%	10,6%
metoda permutacji				
α = 0,01	1,4%	**1,7%****	1,5%	**1,6%***
α = 0,05	5,6%	5,8%	6,0%	5,9%
α = 0,1	10,8%	10,9%	10,7%	11,0%

Źródło: obliczenia własne.

SYMULACYJNA OCENA ROZMIARU TESTU BDS

S t r e s z c z e n i e

Test BDS jest jednym z najważniejszych i najczęściej stosowanych narzędzi detekcji nieliniowości w szeregach czasowych. W artykule, przy zastosowaniu symulacji Monte Carlo, analizie poddano jego rozmiar. Symulacje przeprowadzono na podstawie szeregów liczb pseudolosowych o różnych długościach, wygenerowanych z siedmiu rozkładów o zróżnicowanych własnościach. W badaniu uwzględniono trzy sposoby aproksymacji rozkładu statystyki testowej: klasyczny – polegający na zastosowaniu asymptotycznego rozkładu normalnego oraz dwie metody próbkowania – bootstrap oraz metodę permutacji.

Słowa kluczowe: test BDS, metody próbkowania, rozmiar testu, symulacje Monte Carlo

SIMULATION ANALYSIS OF THE SIZE OF THE BDS TEST

A b s t r a c t

The BDS test is one of the most important and most commonly used tools for detection of nonlinearity in time series. In the paper, the size of the BDS test is assessed using Monte Carlo simulations. The simulation uses pseudo-random series of different length, generated from seven distributions with different properties. In the research, the approximation of the finite sample distribution of the BDS statistic was performed using three methods: the classical one – based on the asymptotic normal distribution and two resampling methods: the bootstrap and the permutation technique.

Keywords: BDS test, resampling methods, size of a test, Monte Carlo simulations