PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXIV – ZESZYT 2 – 2017

EMIL PANEK[1]

GOSPODARKA GALE'A Z WIELOMA MAGISTRALAMI. „SILNY" I „BARDZO SILNY" EFEKT MAGISTRALI

1. WSTĘP

W artykule Panek (2016b) przedstawiliśmy model stacjonarnej gospodarki Gale'a z tzw. wielopasmową magistralą, złożoną z wiązki promieni von Neumanna oraz udowodniliśmy „słabe" twierdzenie o magistrali głoszące, że w długich okresach czasu (w długim horyzoncie $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$) optymalne procesy wzrostu w takiej gospodarce są prawie zawsze zbieżne do wielopasmowej magistrali[2]. Obecnie prezentujemy „silną" oraz „bardzo silną" wersję twierdzenia o wielopasmowej magistrali w stacjonarnej gospodarce Gale'a. Pierwsze głosi, że zbieżność optymalnych procesów wzrostu do wielopasmowej magistrali ma miejsce zawsze, poza ewentualnie pewną skończoną liczbą jego początkowych i/lub końcowych okresów, niezależną od długości horyzontu T. Im dłuższy jest horyzont, tym dłużej optymalne procesy w fazie środkowej przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu wielopasmowej magistrali. Zgodnie z drugim twierdzeniem, „wejście" optymalnego procesu wzrostu na wielopasmową magistralę jest (prawie) bezpowrotne, po osiągnięciu magistrali gospodarka pozostaje na niej wszędzie dalej poza, być może, ostatnim okresem horyzontu T.

Wartością dodaną artykułu – na tle znanej autorowi literatury przedmiotu – jest wykazanie, że magistralna stabilność optymalnych procesów wzrostu jest nie tylko atrybutem stacjonarnej gospodarki Gale'a z pojedynczą magistralą, lecz także jej immanentną cechą również wtedy, gdy miejsce pojedynczej magistrali (pojedynczego promienia von Neumanna) w gospodarce zajmuje wiązka magistral (magistrala wielopasmowa).

2. MODEL

W modelu stacjonarnej gospodarki Gale'a z wielopasmową magistralą przedstawionym w pracy Panek (2016b) kluczową rolę gra przestrzeń produkcyjna typu Gale'a $Z \subset R_+^{2n}$ złożona z par n-wymiarowych, nieujemnych wektorów nakładów (zużycia) $x = (x_1, \dots, x_n)$ i produkcji (wyników) $y = (y_1, \dots, y_n)$. Zapis $(x, y) \in Z$ oznacza, że

[1] Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej, Katedra Ekonomii Matematycznej, al. Niepodległości 10, 60-967 Poznań, Polska, e-mail: emil.panek@ue.poznan.pl.

[2] W sensie miary kątowej, którą definiujemy dalej (patrz p. 2). Na wielopasmowej magistrali gospodarka osiąga najwyższe tempo wzrostu (tamże).

w gospodarce z wektora nakładów x można wytworzyć (w ustalonej jednostce czasu) wektor produkcji y. Przestrzeń produkcyjna Gale'a spełnia następujące warunki:

(G1) $\forall (x,y) \in Z\ \forall \lambda \geq 0\ (\lambda(x,y) \in Z)$

(warunek proporcjonalności nakładów i wyników),

(G2) $\forall \left(x^i, y^i\right) \in Z, i = 1{,}2\ \left((x^1 + x^2, y^1 + y^2) \in Z\right)$

(warunek addytywności procesów produkcyjnych),

(G3) $\forall (x,y) \in Z\ (x = 0 \Longrightarrow y = 0)$

(warunek „braku rogu obfitości"),

(G4) $\forall (x,y) \in Z\ (x' \geqq x \Longrightarrow (x',y) \in Z)$

(możliwość marnotrawstwa nakładów),

(G5) $\forall (x,y) \in Z\ (0 \leqq y' \leqq y \Longrightarrow (x,y') \in Z)$

(możliwość marnotrawstwa mocy produkcyjnych)

(G6) $\forall \left(x^i, y^i\right) \in Z, i = 1{,}2, \dots, \infty\ \left(\left(x^i, y^i\right) \underset{i}{\rightarrow} (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow (\bar{x}, \bar{y}) \in Z\right)$

(domkniętość przestrzeni produkcyjnych).

Zbiór Z jest stożkiem domkniętym i wypukłym, z wierzchołkiem w 0. Przedmiotem naszego zainteresowania są nietrywialne (niezerowe) procesy $(x,y) \in Z \setminus \{0\}$. Liczbę $\alpha(x,y) = \max\{\alpha | \alpha x \leqq y\}$ nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x,y) \in Z \setminus \{0\}$. Można wykazać, że:
- funkcja $\alpha(\cdot)$ jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z \setminus \{0\}$,
- istnieje $\alpha_M = \max\limits_{(x,y) \in Z \setminus \{0\}} \alpha(x,y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) < +\infty$,

zob. np. Panek (2003, tw. 5.2). Proces $(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\}$, dla którego $\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M$, nazywamy optymalnym procesem produkcji. Proces ten jest określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią (z dokładnością do struktury). Liczbę α_M nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektowności produkcji w gospodarce Gale'a. Przez

$$Z_{opt} = \{(\bar{x}, \bar{y}) \in Z \setminus \{0\} |\ \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M\} \tag{1}$$

oznaczamy zbiór wszystkich optymalnych procesów produkcji w gospodarce Gale'a. Zbiór Z_{opt} jest stożkiem wypukłym nie zawierającym 0, Panek (2016b, tw. 1). Zakładamy, że gospodarka Gale'a spełnia następujący warunek silnej regularności:

(G7) $\forall(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}\ (\bar{y} > 0)$

głoszący, że w optymalnych procesach produkcji wytwarzane są wszystkie towary[3]. Wynika stąd, że technologiczna efektywność każdego optymalnego procesu produkcji jest dodatnia:

$$\forall(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}\ (\alpha(\bar{x},\bar{y}) = \alpha_M > 0).$$

Jeżeli $(x,y) \in Z \setminus \{0\}$ i $y \neq 0$, to o wektorze $s = \frac{y}{\|y\|} = \left(\frac{y_1}{\|y\|}, \frac{y_2}{\|y\|}, \dots, \frac{y_n}{\|y\|}\right)$ mówimy, że charakteryzuje strukturę produkcji w procesie (x,y)[4]. Przez

$$S = \left\{s \mid \exists(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}\ \left(s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}\right)\right\} \tag{2}$$

oznaczamy zbiór wektorów charakteryzujących strukturę produkcji we wszystkich optymalnych procesach $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}$. Przy założeniach **(G1)**–**(G7)** zbiór ten jest niepusty, zwarty i wypukły oraz składa się (wobec **(G7)**) wyłącznie z wektorów dodatnich, Panek (2016b, tw. 2). Niech $s \in S$. Półprostą

$$N_s = \{\lambda s | \lambda > 0\}$$

nazywamy promieniem von Neumanna (generowanym przez proces $(\bar{x},\bar{y}) \in Z_{opt}$, $s = \frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$). Zbiór (wiązkę) promieni

$$\mathbb{N} = \cup_{s \in S} N_s$$

nazywamy wielopasmową magistralą produkcyjną w stacjonarnej gospodarce Gale'a.

Niech $p = (p_1, \dots, p_n) \geq 0$[5] będzie wektorem cen towarów oraz $(x,y) \in Z \setminus \{0\}$. Liczbę[6]

$$\beta(x,y,p) = \frac{\langle p,y \rangle}{\langle p,x \rangle}$$

($\langle p,x \rangle \neq 0$) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x,y) przy cenach p. Jeżeli zachodzą warunki **(G1)**–**(G7)**, to istnieją takie ceny $\bar{p} \geq 0$, że

$$\forall(x,y) \in Z \setminus \{0\}\ (\beta(x,y,\bar{p}) \leq \alpha_M)$$

---

[3] Słabszy warunek (G7') przedstawimy w p. 4.

[4] Tutaj i dalej: jeżeli $a \in R^n$, to $\|a\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|$. Zauważmy przy okazji, że (wobec **(G3)**) jeżeli $(x,y) \in Z \setminus \{0\}$, to $x \neq 0$.

[5] Zapis $p \geq 0$ oznacza, że $p \geqq 0$ oraz $p \neq 0$.

[6] Tutaj i dalej: jeżeli $a, b \in R^n$, to $\langle a,b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

(wszędzie gdzie $\langle p, x\rangle \neq 0$) oraz

$$\forall(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \setminus \{0\}\ (\beta(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) = \alpha_M)$$

lub równoważnie

$$\forall(x, y) \in Z \setminus \{0\}\ (\langle\bar{p}, y\rangle \leq \alpha_M\langle\bar{p}, x\rangle) \tag{3}$$

oraz

$$\forall(\bar{x}, \bar{y}) \in Z_{opt} \setminus \{0\}\ (\langle\bar{p}, \bar{y}\rangle = \alpha_M\langle\bar{p}, \bar{x}\rangle > 0), \tag{4}$$

Panek (2016b, tw. 4). Każda trójka $\{\alpha_M,\ (\bar{x}, \bar{y}),\ \bar{p}\}$ wyznacza tzw. optymalny stan równowagi v. Neumanna. Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen równowagi.

Zakładamy, że czas biegnie skokowo oraz $T = \{0, 1, \dots, t_1\}$ jest ustalonym interesującym nas horyzontem funkcjonowania gospodarki ($t_1 < +\infty$). Przez $x(t) = \big(x_1(t), \dots, x_n(t)\big)$ oznaczamy wektor nakładów, a przez $y(t) = \big(y_1(t), \dots, y_n(t)\big)$ wektor produkcji w okresie t. Warunek $\big(x(t), y(t)\big) \in Z$ oznacza, że w okresie t z nakładów $x(t)$ możliwe jest wytworzenie produkcji $y(t)$. Nakłady w okresie następnym $x(t+1)$ mogą pochodzić jedynie z produkcji $y(t)$ wytworzonej w okresie poprzednim, $x(t+1) \leqq y(t)$. W świetle **(G4)** prowadzi to do warunku:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z,\ t = 0, 1, \dots, t_1. \tag{5}$$

W okresie początkowym produkcja jest ustalona:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \tag{6}$$

O ciągu wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniających warunki (5)–(6) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w gospodarce Gale'a. Dla dowolnego początkowego wektora produkcji $y^0 \geq 0$ i dowolnej długości horyzontu T istnieją (y^0, t_1) – dopuszczalne procesy wzrostu, zob. np. Panek (2003, tw. 5.7). W gospodarce Gale'a szczególną postać mają dopuszczalne procesy $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w których $\bar{y}(t+1) = \alpha_M\bar{y}(t)$, lub inaczej procesy postaci

$$\bar{y}(t) = \alpha_M^t\bar{y}^0, \tag{7}$$

nazywane stacjonarnymi procesami z tempem wzrostu α_M. Przy założeniach **(G1)–(G6)** stacjonarne procesy wzrostu postaci (7) istnieją, gdy początkowy wektor produkcji spełnia warunek $\bar{y}^0 \in \mathbb{N}$ (równoważnie, gdy $\frac{\bar{y}^0}{\|\bar{y}^0\|} = s \in S$). Są one określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez dowolną stałą dodatnią): jeżeli $\bar{y}^0 \in \mathbb{N}$, to

$$\forall t \in T(\bar{y}(t) \in \mathbb{N}) \text{ oraz } \forall t \in T\ \forall\lambda > 0\ (\lambda\bar{y}(t) \in \mathbb{N}).$$

W gospodarce Gale'a tempo α_M jest najwyższym możliwym do osiągnięcia tempem wzrostu, w szczególności nie istnieją stacjonarne procesy wzrostu postaci $\bar{y}(t) = \gamma^t \bar{y}^0$ z tempem $\gamma > \alpha_M$. Dlatego procesy postaci (7) nazywane są także optymalnymi stacjonarnymi procesami w gospodarce Gale'a. Wszystkie takie procesy leżą na wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$.

Wszędzie poza magistralą osiągane przez gospodarkę tempo wzrostu jest niższe od α_M. Z faktem tym koresponduje założenie, że również efektywność ekonomiczna każdego procesu poza magistralą $\mathbb{N}$ jest niższa od optymalnej[7]. W szczególności oznacza to, że

(G8) $\forall (x, y) \in Z \setminus \{0\}\ (x \notin\ \mathbb{N} \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) < \alpha_M)$.

Ustalmy następującą miarę odległości wektora towarów (w zależności od kontekstu będą to nakłady x lub produkcja y) od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$[8]:

$$d(x, \mathbb{N}) = \inf_{x' \in \mathbb{N}} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|.$$

Jeżeli zachodzi warunek **(G8)**, to

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M) \forall (x, y) \in Z \setminus \{0\}\ (d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x, y, \bar{p}) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon), \quad (8)$$

Panek (2016b, tw. 5).

Niech proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie rozwiązaniem następującego zadania maksymalizacji wartości produkcji mierzonej w cenach równowagi w ostatnim okresie t_1 horyzontu T:

$$\max \langle \bar{p}, y(t_1) \rangle \quad (9)$$

$$\text{p.w. } (5)\text{–}(6). \quad (10)$$

Przy założeniach **(G1)–(G6)** zadanie to ma rozwiązanie[9]. Nazywamy je $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu w stacjonarnej gospodarce Gale'a.

---

[7] W klasycznym modelu Gale'a (z pojedynczym promieniem von Neumanna) warunek ten zapewnia jednoznaczność magistrali, zob. np. Nikaido (1968, rozdz. IV, § 13), Panek (2003, rozdz. 5, pkt 5.1.3), Takayama (1985, rozdz. 7).

[8] W ekonomii matematycznej wielkość $\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{x'}{\|x'\|} \right\|$ nazywana bywa umownie odległością kątową między wektorami x, x'; zob. np. Nikaido (1968, rozdz. 4, p. 13.3). Przez analogię $d(x, \mathbb{N})$ nazywamy odległością kątową wektora x od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$.

[9] Zob. np. Panek (2003, tw. 5.7).

□ **Twierdzenie 1** („Słabe” twierdzenie o magistrali). Jeżeli zachodzą warunki **(G1)–(G8)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k, iż liczba okresów czasu, w których $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek:

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) \geq \varepsilon$$

nie przekracza k. Liczba k zależy od ε oraz nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód. Panek (2016b, tw. 6). ■

3. „SILNE” I „BARDZO SILNE” TWIERDZENIE O MAGISTRALI

Weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ i oznaczmy przez $Z(\varepsilon)$ zbiór dopuszczalnych procesów produkcji z nakładami odległymi o co najmniej ε od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$:

$$Z(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z \setminus \{0\} | d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon\}.$$

Zgodnie z (8) efektywność ekonomiczna $\beta(x, y, \bar{p})$ każdego procesu $(x, y) \in Z(\varepsilon)$ jest niższa od optymalnej o co najmniej $\delta_\varepsilon > 0$. Poniżej przedstawiamy niektóre własności funkcji $\beta(\cdot, \cdot, \bar{p})$, które będą nam potrzebne dalej. Obowiązują warunki **(G1)–(G8)**.

□ **Fakt 1.**

$$\beta(\cdot, \cdot, \bar{p}) \in C^0(Z(\varepsilon) \to R_+^1).$$

Dowód. Funkcja $\beta(\cdot, \cdot, \bar{p})$ jest ciągła na zwartym zbiorze

$$V(\varepsilon) = \{(x, y) \in Z | \|x\| = 1 \wedge d(x, \mathbb{N}) \geq \varepsilon\},$$

zob. Panek (2016b, dowód tw. 5). Stąd oraz z dodatniej jednorodności stopnia 0 wynika jej ciągłość na $Z(\varepsilon) = \{\lambda \cdot V(\varepsilon) | \lambda > 0\}$. ■

□ **Fakt 2.**

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \max_{(x,y) \in Z(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = b(\varepsilon) < \alpha_M. \tag{11}$$

Dowód. Ciągła funkcja $\beta(\cdot, \cdot, \bar{p})$ jest dodatnio jednorodna stopnia 0, więc

$$\max_{(x,y) \in Z(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}) = \max_{(x,y) \in V(\varepsilon)} \beta(x, y, \bar{p}).$$

Zbiór $V(\varepsilon)$ jest zwarty, więc istnieje

$$\max_{(x,y)\in V(\varepsilon)} \beta(x,y,\bar{p}) = b(\varepsilon).$$

Zgodnie z (8):

$$\max_{(x,y)\in Z(\varepsilon)} \beta(x,y,\bar{p}) = \max_{(x,y)\in V(\varepsilon)} \beta(x,y,\bar{p}) = b(\varepsilon) \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon < \alpha_M.$$

■

Wprowadzając oznaczenie $\delta(\varepsilon) = \alpha_M - b(\varepsilon)$ możemy warunek (11) zapisać inaczej tak[10]:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M]\ \forall (x,y) \in Z(\varepsilon) \big(\beta(x,y,\bar{p}) \leq \alpha_M - \delta(\varepsilon)\big). \tag{12}$$

Funkcja $b(\cdot)$ jest nierosnąca (tam gdzie jest określona), $b(\varepsilon) \to \alpha_M$ przy $\varepsilon \to 0$, zatem $\delta(\varepsilon) \to 0$, gdy $\varepsilon \to 0$. Przy dowodzie „silnego" twierdzenia o magistrali (twierdzenie 2) korzystamy z następującego warunku monotoniczności:

(G9) Efektywność ekonomiczna procesu $(x,y) \in Z \setminus \{0\}$ maleje w miarę oddalania się (w sensie metryki d) nakładów x od wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$.

Jeżeli zachodzi ten warunek, wtedy funkcja $b(\cdot)$ maleje (równoważnie, funkcja $\delta(\cdot)$ rośnie na obszarze określoności[11].

□ **Fakt 3.**

$$\forall s \in S^n_{++}(1)\ \forall \bar{s} \in S\ \exists \sigma(s,\bar{s}) \in (0,1]\ \forall \delta \in (0,\alpha_M)\ \exists \varepsilon' > 0$$

$$\Big(\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow \big((s, \sigma(s,\bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \wedge \alpha(s, \sigma(s,\bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta\big)\Big),$$

gdzie: $S^n_{++}(1) = \{x \in R^n \mid x > 0 \wedge \|x\| = 1\}, \Omega(1) = \{(x,y) \in Z \mid \|x\| = 1\}$.

Dowód[12]. Weźmy dowolne wektory $s \in S^n_{++}(1)$, $\bar{s} \in S$. Zważywszy że $\|s\| = \|\bar{s}\| = 1$ stwierdzamy, iż istnieje liczba

$$\lambda(s,\bar{s}) = \min\{\lambda \mid \lambda s \geqq \bar{s}\} = \max_i \frac{\bar{s}_i}{s_i} \geq 1.$$

---

[10] Liczba $\delta_\varepsilon = \delta(\varepsilon)$ jest największą liczbą spełniającą warunek (8).

[11] Warunek **(G9)** jest spełniony w szczególności, gdy wszędzie poza Z_{opt} przestrzeń produkcyjna Gale'a jest stożkiem silnie wypukłym: dla dowolnych liczb $\alpha, \beta > 0$ i każdej pary liniowo niezależnych procesów $(x^1,y^1), (x^2,y^2) \in Z \setminus Z_{opt}$ ich kombinacja liniowa $(x,y) = \alpha(x^1,y^1) + \beta(x^2,y^2)$ jest punktem wewnętrznym przestrzeni produkcyjnej Z.

[12] Dowód wzorowany na Panek (2015, lemat 1).

Ponieważ $(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1) \subset Z$, więc z **(G4)** dostajemy $(\lambda(s, \bar{s})s, \alpha_M \bar{s}) \in Z$, czyli

$$(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \in \Omega(1), \tag{13}$$

gdzie $\sigma(s, \bar{s}) = \frac{1}{\lambda(s,\bar{s})}$, $\sigma \in C^0(S_{++}(1) \times S \to (0,1])$, $\sigma(\bar{s}, \bar{s}) = 1$.

Funkcja α jest ciągła na $\Omega(1)$ oraz

$$\alpha(\bar{s}, \alpha_M \bar{s}) = \max_{(x,y)\in\Omega(1)} \alpha(x, y) = \alpha_M,$$

więc

$$\forall \delta \in (0, \alpha_M) \exists \varepsilon' > 0 (\|s - \bar{s}\| < \varepsilon' \Rightarrow \alpha(s, \sigma(s, \bar{s})\alpha_M \bar{s}) \geq \alpha_M - \delta). \tag{14}$$

Z (13), (14) wynika teza. ■

Fakt 3 głosi, że jeżeli wektor (unormowanych) nakładów s leży blisko któregokolwiek wektora $\bar{s}$ (struktury produkcji na wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$), to istnieje proces, który (z efektywnością dowolnie bliską optymalnej) z nakładów s prowadzi do wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$.

□ **Twierdzenie 2** („Silne" twierdzenie o magistrali). Niech $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ będzie $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu. Jeżeli spełnione są warunki **(G1)**–**(G9)** oraz istnieje taki $(y^0, \check{t})$ – dopuszczalny proces $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{\check{t}}$, $\check{t} < t_1$, że $\check{y}(\check{t}) \in \mathbb{N}$, to

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists k_\varepsilon \in N \big(t_1 > 2k_\varepsilon \; \Rightarrow \forall t \in \{k_\varepsilon, k_\varepsilon + 1, \dots, t_1 - k_\varepsilon\} \, (d(y^*(t), \mathbb{N}) < \varepsilon)\big)$$

(N oznacza tutaj zbiór liczb naturalnych).

Dowód. Pokażemy najpierw, że

$$\exists \tilde{\varepsilon} > 0 \; \forall s \in S \; (U_{\tilde{\varepsilon}}(s) \subset R^n_{++}), \tag{15}$$

gdzie $U_{\tilde{\varepsilon}}(s) = \{x \in R^n | \|x - s\| < \tilde{\varepsilon}\}$. Istotnie, ponieważ zbiór $S \subset R^n_{++}$ jest zwarty i składa się z wektorów dodatnich, to

$$\forall i \; \exists v_i = \min_{s \in S} s_i > 0.$$

Niech

$$f(s, y) = s + y,$$

$s \in S$, $y \in K_\nu = \{x \in R^n | -\nu \leq x_i \leq \nu, i = 1, \dots, n\}$, $\nu = \frac{1}{2}\min_i \nu_i > 0$. Zbiór $S \times K_\nu$ jest zwarty, a odwzorowanie $f: S \times K_\nu \to R^n$ ciągłe, więc jego obraz $G_\nu = f(S \times K_\nu)$ jest zwarty oraz $S \subset G_\nu \subset R^n_{++}$. Niech $\tilde{\varepsilon} = \frac{\nu}{2} > 0$. Wtedy $\forall s \in S\ (U_{\tilde{\varepsilon}}(s) \subset G_\nu \subset R^n_{++})$.

Weźmy teraz dowolną liczbę $\varepsilon > 0$, liczbę $\delta(\varepsilon) \in (0, \alpha_M]$ spełniającą warunek (12), liczbę $\delta \in \big(0, \delta(\varepsilon)\big)$ oraz odpowiadającą jej liczbę $\varepsilon' \in (0, \min\{\varepsilon, \tilde{\varepsilon}\})$ z faktu 3. Zgodnie ze „słabym" twierdzeniem o magistrali istnieje taka liczba naturalna $k_{\varepsilon'}$, że jeżeli $t_1 > k_{\varepsilon'}$, to

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) < \varepsilon' \tag{16}$$

co najmniej w jednym okresie $t < t_1$. Niech $t_1 > 2k_{\varepsilon'}$. Przez τ_1 oznaczmy pierwszy, a przez τ_2 ostatni okres, w którym zachodzi warunek (16). Wówczas (w świetle (15), zważywszy że $\varepsilon' \leq \tilde{\varepsilon}$) mamy

$$\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} > 0$$

oraz w myśl faktu 3:

$$\exists \bar{s} \in \bar{S} \left(\left(\frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|}, \sigma^* \alpha_M \bar{s} \right) \in \Omega(1) \right),$$

tzn.

$$(y^*(\tau_1), \rho\sigma^*\alpha_M\bar{s}) \in Z,$$

gdzie $\sigma^* = \sigma(s^*(\tau_1), \bar{s})$, $s^*(\tau_1) = \frac{y^*(\tau_1)}{\|y^*(\tau_1)\|} > 0$, $\rho = \|y^*(\tau_1)\| > 0$. Dalej dowód przebiega analogicznie jak w pracy Panek (2015, tw. 3, s. 255–256). Tworzymy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), t = 0, 1, \dots, \tau_1, \\ \rho\sigma^*\alpha_M^{t-\tau_1}\bar{s}, t = \tau_1 + 1, \dots, t_1 \end{cases}$$

i z definicji procesu optymalnego $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ dostajemy nierówność:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \rho\sigma^*\alpha_M^{t_1-\tau_1}\langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \tag{17}$$

Zakładając, że k' jest liczbą okresów (między τ_1, τ_2), w których

$$d(y^*(t), \mathbb{N}) \geq \varepsilon,$$

z (3), (5), (8) otrzymujemy:

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1)\rangle \le (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\, \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\, (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\, \langle \overline{p}, y^*(\tau_1)\rangle. \tag{18}$$

Łącząc (17), (18) dochodzimy do nierówności

$$0 < \rho\sigma^* \alpha_M^{t_1-\tau_1} \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle \le (\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\, \alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\, (\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\, \langle \overline{p}, y^*(\tau_1)\rangle$$

(z której wynika w szczególności, że $\delta(\varepsilon) < \alpha_M$), lub inaczej:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \ge \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{\rho\sigma^* \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle}{\langle \overline{p}, y^*(\tau_1)\rangle}.$$

Nierówność powyższą, po podstawieniu $s^*(\tau_1) = \dfrac{y^*(\tau_1)}{\left\| y^*(\tau_1)\right\|}$, możemy zapisać w równoważnej postaci:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \ge \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{\sigma^* \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle}{\langle \overline{p}, s^*(\tau_1)\rangle}. \tag{19}$$

Zgodnie z faktem 3:

$$\alpha = \alpha(s^*(\tau_1), \sigma^* \alpha_M \overline{s}) \ge \alpha_M - \delta,$$

zatem $\alpha s^*(\tau_1) \le \sigma^* \alpha_M \overline{s}$ oraz $(\alpha_M - \delta)\; s^*(\tau_1) \le \sigma^* \alpha_M \overline{s}$. Wówczas:

$$(\alpha_M - \delta)\; \langle \overline{p}, s^*(\tau_1)\rangle \le \sigma^* \alpha_M \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle,$$

czyli

$$\frac{\sigma^* \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle}{\langle \overline{p}, s^*(\tau_1)\rangle} \ge \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

Stąd i z (19) dostajemy:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} \ge \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1-\tau_2} \frac{\alpha_M - \delta}{\alpha_M}.$$

Pamiętając, że $0 < \delta(\varepsilon') < \delta(\varepsilon) < \alpha_M$ (gdyż $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ i funkcja $\delta(\cdot)$ jest rosnąca; zob. warunek **(G9)**) oraz $\delta \in (0, \delta(\varepsilon))$ i $t_1 - \tau_2 \ge 0$, dochodzimy do nierówności:

$$\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'} > \left(\frac{\alpha_M}{\alpha_M - \delta(\varepsilon')}\right)^{t_1 - \tau_2} \frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M},$$

czyli $\left(\frac{\alpha_M - \delta(\varepsilon)}{\alpha_M}\right)^{k'-1} > 1$ lub (równoważnie) $\left(\alpha_M - \delta(\varepsilon)\right)^{k'-1} > \alpha_M^{k'-1}$.
Jedyną nieujemną liczbą całkowitą spełniającą ten warunek jest $k' = 0$. Tezę twierdzenia otrzymujemy przyjmując $k_\varepsilon = k_{\varepsilon'}$. ■

Przypomnijmy, że zgodnie ze „słabym" twierdzeniem o magistrali (twierdzenie 1), w długich okresach czasu (w długim horyzoncie T) optymalne procesy wzrostu są „prawie zawsze" (w prawie wszystkich okresach) zbieżne do magistrali wielopasmowej. Twierdzenie nie rozstrzyga kiedy (w których okresach) zbieżność taka ma miejsce. Udowodnione wyżej „silne" twierdzenie o magistrali wielopasmowej precyzuje, że dzieje się tak zawsze, za wyjątkiem ewentualnie początkowych i/lub końcowych okresów horyzontu T. Im horyzont jest dłuższy, tym dłużej optymalne procesy wzrostu w jego środkowym okresie przebiegają w dowolnie bliskim otoczeniu wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$.[13] Szczególną sytuację mamy, gdy optymalny proces w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do magistrali. Mówi o tym kolejne twierdzenie.

□ **Twierdzenie 3** („Bardzo silne" twierdzenie o magistrali). Jeżeli spełnione są warunki **(G1)**–**(G8)** i $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do wielopasmowej magistrali

$$y^*(\check{t}) \in \mathbb{N},$$

to

$$\forall t \in \{\check{t} + 1, \dots, t_1 - 1\} \; (y^*(t) \in \mathbb{N}).$$

Dowód. Z definicji $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, zgodnie z (3) mamy:

$$\langle \bar{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \bar{p}, y^*(t) \rangle, \; t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \tag{20}$$

Jeżeli w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ proces ten dociera do magistrali, wówczas istnieje także (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci

[13] Czytelnika zainteresowanego klasycznymi wersjami twierdzeń o zbieżności optymalnych procesów wzrostu w gospodarce typu Gale'a do pojedynczej magistrali N_s (a nie do wiązki magistral $\mathbb{N}$) odsyłamy np. do prac Nikaido (1968 rozdz. IV), Gale (1967), McKenzie (1976, 1998, 2005 rozdz. 26), Lancaster (1968, rozdz. 11), Panek (2013, 2014, 2016a). Na marginesie warto zauważyć, że zainicjowane ponad pół wieku temu badania nad „efektem magistrali" w modelach dynamiki ekonomicznej typu input – output w ostatnim okresie znajdują coraz mocniejsze ugruntowanie w teorii sterowania optymalnego i teorii gier, zob. np. Kolokoltsov, Yang (2012), Rapoport, Cartigny (2010), Zaslawski (2015).

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), t = 0, 1, \dots, \check{t}, \\ \sigma\bar{s}\alpha_M^{t-\check{t}}, \qquad t = \check{t}+1, \dots, t_1, \end{cases}$$

$\sigma > 0$, $\bar{s} \in S$, co prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \geq \langle \bar{p}, \tilde{y}(t_1) \rangle = \sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0. \tag{21}$$

Załóżmy, że $y^*(\tau) \notin \mathbb{N}$ w pewnym okresie $\tau \in \{\check{t}+1, \dots, t_1 - 1\}$. Wówczas

$$\exists \varepsilon > 0 \; (d(y^*(\tau), \mathbb{N}) \geq \varepsilon),$$

i zgodnie z (8) istnieje taka liczba $\delta_\varepsilon \in (0, \alpha_M)$, że

$$\langle \bar{p}, y^*(\tau+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\tau) \rangle. \tag{22}$$

Z (20), (22) otrzymujemy nierówność

$$\langle \bar{p}, y^*(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, y^*(\check{t}) \rangle, \tag{23}$$

gdzie $y^*(\check{t}) = \sigma\bar{s} > 0$. Stąd oraz z (21) wynika, że

$$\sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle \geq \sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}} \langle \bar{p}, \bar{s} \rangle > 0,$$

co jest możliwe tylko gdy $\delta_\varepsilon \leq 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

4. UWAGI KOŃCOWE

Uwaga 1. „Bardzo silne" twierdzenie o magistrali pozostaje prawdziwe po zastąpieniu warunku silnej regularności **(G7)** następującym warunkiem tzw. słabej regularności:

(G7') $\forall s \in S \; \exists t_s < t_1 \wedge \exists (s, t_s)$ – dopuszczalny proces $\{y(t)\}_{t=0}^{t_s}$ spełniający warunek:

$$y(0) = s, y(t_s) > 0$$

głoszącym, że z każdego miejsca (punktu) wielopasmowej magistrali $\mathbb{N}$ pewien proces wzrostu w skończonym czasie $t_s < t_1$ prowadzi do dodatniego wektora produkcji $y(t_s)$. Warunek ten jest słabszy od **(G7)**, tzn. jeżeli zachodzi **(G7)**, to zachodzi także **(G7')**[14].

[14] Więcej o warunku **(G7')** piszmy w artykule Panek (2016b).

Uwaga 2. Rozpatrzmy zamiast zadania (9)–(10) następujący problem maksymalizacji użyteczności produkcji w końcowym okresie horyzontu T:

$$\max u\big(y(t_1)\big) \tag{24}$$

$$\text{p.w. } (5)–(6). \tag{25}$$

O funkcji użyteczności $u: R^n_+ \to R^1_+$ zakładamy, że[15]:

(G10) (i) funkcja $u(\cdot)$ jest ciągła, wklęsła, rosnąca i dodatnio jednorodna stopnia 1,

(2i) $\exists a > 0\ \forall\, y \geq 0\ (u(y) \leq a\,\langle \bar{p}, y\rangle)$,

(3i) $\forall \mathrm{s} \in \mathrm{S}\ (\mathrm{u}(\mathrm{s}) = a\langle \bar{p}, s\rangle\ > 0)$.

W myśl **(2i)** funkcję użyteczności aproksymuje z góry forma liniowa z wektorem kierunkowym $a\bar{p}$, gdzie a jest pewną liczbą dodatnią. Warunek **(3i)** jest równoważny z następującym:

$$\forall y \in \mathbb{N}\ (u(y) = a\langle \bar{p}, y\rangle),$$

co oznacza, że na wielopasmowej magistrali (dla każdego wektora $y \in \mathbb{N}$) hiperpłaszczyzna $y_{n+1} = a\langle \bar{p}, y\rangle$ jest styczna do wykresu funkcji użyteczności $u(y)$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia:

$$R_{y^0,0} = \{y^0\},$$

$$R_{y^0,1} = \big\{y(1) |\ \big(y^0, y(1)\big) \in Z\big\},$$

$$R_{y^0,t} = \big\{y(t) |\ \big(y(t-1), y(t)\big) \in Z\big\},\ t = 2, \dots, t_1.$$

Wówczas zadanie (24)–(25) jest równoważne z zadaniem

$$\max u(y) \tag{24'}$$

$$y \in R_{y^0,t_1}, \tag{25'}$$

R_{y^0,t_1} jest zbiorem wszystkich wektorów produkcji, które w okresie t_1 jest zdolna wytworzyć gospodarka z początkowym wektorem produkcji $y(0) = y^0$ (w okresie $t = 0$).

---

[15] Zob. np. Nikaido (1968, rozdz. IV), Panek (2016b), Takayama (1985, rozdz. 7). Warunek **(G10)** jest silniejszy od podobnego warunku **(G9)** w artykule Panek (2016b).

Zadanie to ma rozwiązanie, gdyż funkcja użyteczności u jest ciągła, a zbiór R_{y^0,t_1} jest zwarty[16]. Tym samym istnieje rozwiązanie zadania (24)–(25). Nazywamy je (y^0, t_1, u) – optymalnym procesem wzrostu i podobnie jak rozwiązanie zadania (9)–(10) oznaczamy przez $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$.

Przy założeniach **(G1)–(G10)** „silne" twierdzenie o magistrali (twierdzenie 2) pozostaje prawdziwe po zastąpieniu $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu (rozwiązania zadania (9)–(10)) przez (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu (rozwiązanie zadania (24)–(25)). Istotnie, powtarzając dosłownie dowód twierdzenia 2 – po podstawieniu $u\big(y^*(t_1)\big)$ zamiast $\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle$ oraz $u(\bar{s})$ zamiast $\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle$ w warunkach (17), (18) – zważywszy na **(G10)(2i)** dochodzimy do pary nierówności:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq \rho\sigma^*\alpha_M^{t_1-\tau_1}u(\bar{s}) \tag{17'}$$

$$u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq a(\alpha_M - \delta(\varepsilon'))^{t_1-\tau_2}\,\alpha_M^{\tau_2-\tau_1-k'}\,(\alpha_M - \delta(\varepsilon))^{k'}\,\langle \bar{p}, y^*(\tau_1)\rangle. \tag{18'}$$

Łącząc (17'), (18') i uwzględniając **(G10)(3i)** dochodzimy do warunku (19). Dalej dowód przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 2.

Uwaga 3. Przy tych samych założeniach prawdziwe pozostaje także „bardzo silne" twierdzenie o magistrali (twierdzenie 3) po zastąpieniu $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnego procesu wzrostu procesem (y^0, t_1, u) – optymalnym. Zakładając, że istnieje choćby jeden okres $\tau \in \{\check{t}+1, \dots, t_1-1\}$, w którym $y^*(\tau) \notin \mathbb{N}$ i powtarzając dowód twierdzenia 3 dochodzimy do konkluzji, że (y^0, t_1, u) – optymalny proces wzrostu (rozwiązanie zadania (24)–(25)) spełnia obecnie (wobec **(G10)(2i)**) – zamiast (21), (23) – warunki następujące:

$$u\big(y^*(t_1)\big) \geq \sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}}u(\bar{s}) > 0, \tag{21'}$$

$$u\big(y^*(t_1)\big) \leq a\langle \bar{p}, y^*(t_1)\rangle \leq a\sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}-1}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle, \tag{23'}$$

skąd wynika, że

$$a\sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}-1}(\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle \geq \sigma\alpha_M^{t_1-\check{t}}u(\bar{s}) > 0.$$

Warunek **(G10)(3i)** stanowi jednak, że $a\langle \bar{p}, \bar{s}\rangle = u(\bar{s})$, co prowadzi do nierówności:

$$\frac{\alpha_M - \delta_\varepsilon}{\alpha_M} \geq 1.$$

Wynika z niej, że $\delta_\varepsilon \leq 0$, a to jest sprzeczne z (8). Otrzymana sprzeczność zamyka dowód.

[16] Zbiory $R_{y^0,t}$ $(t = 0, 1, \dots, t_1)$ są niepuste, wypukłe oraz zwarte, zob. Panek (2003, lemat 5.1).

5. ZAKOŃCZENIE

Słabą stroną rozważanego tutaj oraz w pracy Panek (2016b) modelu Gale'a z wielopasmową magistralą jest stacjonarność gospodarki. Wprawdzie w kilku publikacjach, m.in. Panek (2013, 2014, 2016a), zajmujemy się modelami różnych niestacjonarnych gospodarek Gale'a, ale podobnie jak w innych znanych pracach z tego zakresu magistrale są tam zawsze pojedynczymi promieniami (w przypadku stacjonarnym) lub pojedynczymi krzywymi (w wariancie niestacjonarnym), leżącymi w przestrzeni fazowej stanów gospodarki.

Z tej perspektywy interesujące jest szersze spojrzenie i prześledzenie własności gospodarek typu Neumanna-Gale'a-Leontiefa z wielopasmowymi magistralami, zmienną technologią oraz różnymi kryteriami wzrostu[17].

LITERATURA

Gale D., (1967), On Optimal Development in a Multi-Sector Economy, *Review of Economic Studies*, 34 (1), 1–18.

Kolokoltsov V., Yang W., (2012), The Turnpike Theorems for Markov Games, *Dynamic Games and Applications*, 2 (3), 294–312.

McKenzie L. W., (1976), Turnpike Theory, *Econometrica*, 44, 841–866.

McKenzie L. W., (1998), Turnpikes, *American Economic Review*, 88, 1–14.

McKenzie L. W., (2005), Optimal Economic Growth, Turnpike Theorems and Comparative Dynamics, w: Arrow K. J., Intriligator M. D., (red.), *Handbook of Mathematical Economics*, ed. 2, III, 26, 1281–1355.

Lancaster K., (1968), *Mathematical Economics*, The Macmillan Company, New York.

Nikaido H., (1968), *Convex Structures and Economic Theory*, Acad. Press, New York.

Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AE, Poznań.

Panek E., (2013), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.

Panek E., (2014), Niestacjonarna gospodarka Gale'a z rosącą efektywnością produkcji na magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 61(1), 5–14.

Panek E., (2015), „Silny" efekt magistrali w modelu dynamiki ekonomicznej typu Gale'a. Zagadnienie wzrostu docelowego (Autopoprawka), *Przegląd Statystyczny*, 62 (2), 253–257.

Panek E., (2016a), „Silny" efekt magistrali w modelu niestacjonarnej gospodarki z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 63 (2), 109–121.

Panek E., (2016b), Gospodarka Gale'a z wieloma magistralami. „Słaby" efekt magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 63 (4), 355–374.

Rapaport A., Cartigny P., (2010), Turnpike Theorems by a Value Function Approach, *Control, Optimization and Calculus of Variations*, 10 (1), 123–141.

Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge.

Zaslawski A. J., (2015), *Turnpike Theory of Continuous-Time Linear Optimal Control Problems*, Springer International Publishing, Switzerland.

---

[17] Nie tylko z kryterium maksymalizacji wartości produkcji (mierzonej w cenach von Neumanna) czy maksymalizacji społecznej funkcji użyteczności produkcji wytworzonej w końcowym okresie horyzontu T (tzw. zadania wzrostu docelowego), ale także np. z kryterium maksymalizacji łącznej wartości produkcji wytworzonej w całym horyzoncie T (odpowiednio: maksymalizacji społecznej funkcji użyteczności zdefiniowanej na wektorach produkcji we wszystkich okresach horyzontu T).

GOSPODARKA GALE'A Z WIELOMA MAGISTRALAMI.
„SILNY" I „BARDZO SILNY" EFEKT MAGISTRALI

S t r e s z c z e n i e

Praca nawiązuje do artykułu Panek (2016b) zawierającego dowód tzw. „słabego" twierdzenia o wielopasmowej magistrali w stacjonarnej gospodarce typu Gale'a. Obecnie prezentujemy „silną" oraz „bardzo silną" wersję twierdzenia o wielopasmowej magistrali. Pokazujemy, że mimo uogólnienia modelu – polegającego na zastąpieniu pojedynczej magistrali (promienia von Neumanna) wiązką magistral, którą nazywamy magistralą wielopasmową – nie zmieniają się wcześniej udowodnione magistralne własności optymalnych procesów wzrostu w gospodarce Gale'a.

Słowa kluczowe: stacjonarna gospodarka Gale'a, równowaga von Neumanna, wielopasmowa magistrala, „silny" i „bardzo silny" efekt magistrali

GALE'S ECONOMY WITH MULTIPLE TURNPIKES.
"STRONG" AND "VERY STRONG" TURNPIKE EFFECT

A b s t r a c t

This paper refers to the Panek (2016b) which contained proof of "weak" multiple turnpike's theorem in the Gale's stationary economy. Here we present "strong" and "very strong" multiple turnpike's theorem. We show that, despite the generalization of this model – involving the replacement of a single turnpike (von Neumann's ray) with the bundle of turnpikes, which we call multilane turnpike – the previously proven turnpike's main properties of the optimal growth processes of the Gale's economy do not change.

Keywords: Gale's stationary economy, von Neumann's equilibrium, multilane turnpike, "strong" and "very strong" turnpike effect