

JUSTYNA WRÓBLEWSKA<sup>1</sup>

## ANALIZA MODELU REALNEGO CYKLU KONIUNKTURALNEGO Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKICH MODELI TYPU VEC<sup>2</sup>

### 1. WSTĘP

Wiele teoretycznych modeli ekonomicznych zakłada występowanie zarówno długo-, jak i krótkookresowych zależności pomiędzy wielkościami pochodzącymi z gospodarki. Do najbardziej znanych przykładów należą różne wersje modelu realnego cyklu koniunkturalnego (modelu RBC), którego nawet najbardziej podstawowa forma przewiduje, że zachowaniem wielkości ekonomicznych sterują wspólne trendy stochastyczne oraz czynniki krótkookresowe. Pytanie, jak duża część zachowania zmiennych jest wynikiem trendów stochastycznych (a więc zaburzeń losowych o trwałym oddziaływaniu), a ile jest wynikiem wstrząsów o charakterze przejściowym, jest ważne, ponieważ poznając naturę podstawowych agregatów makroekonomicznych określamy możliwości wpływania na nie. W kontekście modeli RBC przyjmuje się, że nawet w krótkich okresach za zachowaniem analizowanych wielkości stoją głównie wstrząsy o trwałym oddziaływaniu (wstrząsy realne), a znaczenie wstrząsów przejściowych (utożsamianych ze wstrząsami nominalnymi) jest mniejsze.

Celem niniejszego opracowania jest empiryczna analiza podstawowego modelu RBC zbudowanego dla produkcji, konsumpcji i inwestycji w gospodarce polskiej w latach 1997–2015, a przez to uzyskanie odpowiedzi na pytanie o naturę wstrząsów sterujących ich zachowaniem. Dla zbadania tego zagadnienia zostanie wykorzystana grupa bayesowskich modeli typu VEC, w których prócz restrykcji nałożonych na parametry opisujące związki długookresowe, dodatkowo mogą zostać nałożone restrykcje na parametry opisujące zależności w skończonym okresie. Podobne badania, ale z wykorzystaniem wnioskowania częstościowego, były już prowadzone dla makroekonomicznych szeregów czasowych pochodzących z gospodarki Stanów Zjednoczonych (zob. np. Hecq i inni, 2000; Issler, Vahid, 2001; Centoni, Cubadda, 2003).

Punkt 2 artykułu poświęcono zarysowaniu teorii ekonomicznej. W punkcie 3 przedstawione zostały bayesowskie modele wykorzystane w części empirycznej. Punkt 4 prezentuje analizowane dane i uzyskane rezultaty. Artykuł kończy podsumowanie i wskazanie kierunków dalszych badań.

---

<sup>1</sup> Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie, Wydział Zarządzania, Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych, ul. Rakowicka 27, 31-510 Kraków, Polska, e-mail: wroblewj@uek.krakow.pl.

<sup>2</sup> Praca została sfinansowana ze środków przyznanych Wydziałowi Zarządzania Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, w ramach dotacji na utrzymanie potencjału badawczego.

## 2. MODEL EKONOMICZNY

W niniejszym opracowaniu zajmiemy się empiryczną analizą podstawowego modelu realnego cyklu koniunkturalnego (modelu RBC), który opisuje zachowanie i zależności trzech zmiennych – produkcji ( $Y$ ), konsumpcji ( $C$ ) oraz inwestycji ( $I$ ). Zgodnie z modelem teoretycznym zaproponowanym w 1988 roku przez Kinga i innych (zob. np. King i inni, 1991; Issler, Vahid, 2001) długookresowe zachowanie tych zmiennych jest sterowane jednym wspólnym trendem stochastycznym, a krótko- i średniookresowe – jednym tzw. wspólnym czynnikiem cyklicznym (Issler, Vahid, 2001):

$$\begin{aligned}\log(Y_t) &= \log(X_t^p) + \bar{y} + \pi_{yk}\hat{k}_t, \\ \log(C_t) &= \log(X_t^p) + \bar{c} + \pi_{ck}\hat{k}_t, \\ \log(I_t) &= \log(X_t^p) + \bar{i} + \pi_{ik}\hat{k}_t,\end{aligned}\tag{1}$$

gdzie  $\log(X_t^p) = \mu + \log(X_{t-1}^p) + \varepsilon_t^p$ ,  $\varepsilon_t^p \sim WN(\sigma^2)$  jest procesem technologicznym,  $\bar{y}$ ,  $\bar{c}$ ,  $\bar{i}$  są wartościami ustalonymi dla  $\log(Y_t/X_t^p)$ ,  $\log(C_t/X_t^p)$ ,  $\log(I_t/X_t^p)$ , odpowiednio, a  $\pi_{jk}$ ,  $j = y, c, i$  oznacza elastyczność  $j$ -tej zmiennej względem odchyłek zasobów kapitału od wartości  $\hat{k}_t$ . W tak zdefiniowanym modelu przyjmujemy zatem założenie, że zachowanie trzech omawianych procesów ( $\log(Y_t)$ ,  $\log(C_t)$ ,  $\log(I_t)$ ) jest sterowane jednym wspólnym trendem stochastycznym ( $\log(X_t^p)$ ), który powstaje w wyniku trwałego oddziaływania (kumulacji) wstrząsów wydajności, oraz jednym wspólnym czynnikiem cyklicznym ( $\hat{k}_t$ ), który wynika z założenia, że krótkookresowa dynamika systemu jest liniową funkcją odchyłek zasobów kapitału od stanu ustalonego (Issler, Vahid, 2001), a więc zależy od jednego czynnika. Spodziewamy się zatem dwóch relacji kointegrujących oraz dwóch różnych liniowych kombinacji zmiennych, które nie będą zawierały części cyklicznej. Dodatkowo, Issler, Vahid (2001) przypomnieli, że synchronizacja części cyklicznej konsumpcji i produkcji została również teoretycznie uzasadniona w pracy Campbella, Mankiwa (1989) i jest ona związana z zachowaniem konsumentów, którzy cały swój dochód z danego okresu przeznaczają na konsumpcję. Im wyższy ich udział w ogóle konsumentów, tym wyższa amplituda cyklu.

Omówiona wyżej teoria została wielokrotnie wykorzystana w empirycznych badaniach. Podstawowy model RBC szacowany dla danych pochodzących z gospodarki Stanów Zjednoczonych jest powszechnie spotykanym przykładem, zarówno w tekstach dotyczących analizy kointegracji, jak i wspólnych czynników cyklicznych, z wykorzystaniem częstościowego wnioskowania statystycznego. Wydaje się, że nie ma podobnych opracowań dla szeregów czasowych z gospodarki polskiej, w których dodatkowo wykorzystano by wnioskowanie bayesowskie. Celem niniejszego opracowania jest zatem uzupełnienie tej luki. Badanie pozwoli ponadto ocenić wpływ wstrząsów długo- i krótkookresowych na analizowane zmienne, co pomoże w poznaniu ich natury.

### 3. MODELE Z KRÓTKO- I DŁUGOOKRESOWYMI RESTRYKCJAMI

Podstawowym modelem wykorzystanym w badaniu będzie  $n$ -wymiarowy model wektorowej autoregresji rzędu  $k$  (VAR( $k$ )) ze stałą, i procesem innowacji zadany gaussowskim białym szumem:

$$y_t = A_1 y_{t-1} + A_2 y_{t-2} + \dots + A_k y_{t-k} + c + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iin(0, \Sigma), \quad (2)$$

$\Sigma$  jest dodatnio określoną  $n$ -wymiarową macierzą symetryczną.

Początki stosowania tego typu modeli w empirycznych analizach makroekonomicznych związane są z przełomową pracą Simsa (1980), w której autor podsumował problemy pojawiające się w analizach opartych na tradycyjnych modelach makroekonomicznych oraz wskazał możliwości i zalety czysto statystycznych modeli VAR. Dowolny proces VAR można przedstawić w postaci wektorowego modelu z mechanizmem korekty błędów<sup>3</sup> (VEC). Dodatkowo, na parametry modelu VEC zostaną narzucone restrykcje zarówno krótko-, jak i długookresowe. Zgodnie z twierdzeniem Grangera o reprezentacji procesy sterowane wspólnymi trendami stochastycznymi (procesy skointegrowane) mają reprezentację w postaci modelu VEC, w której tzw. macierz mnożników długookresowych jest osobliwa (zob. np. Engle, Granger, 1987 dla modelu jednorównaniowego i Johansen, 1995 dla modeli VEC):

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \Gamma_1 \Delta y_{t-1} + \Gamma_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \Gamma_{k-1} \Delta y_{t-k+1} + \tilde{c} + \varepsilon_t = \\ &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \Gamma' z_t + \tilde{c} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iin(0, \Sigma). \end{aligned} \quad (3)$$

Wektor  $\tilde{y}_{t-1}$ , wymiaru  $m \times 1$  ( $m \geq n$ ), może zawierać składowe deterministyczne ( $\tilde{y}_{t-1} = (y'_{t-1} d'_{t-1})'$ ), tak więc liczba składowych deterministycznych ograniczonych do przestrzeni kointegrującej wynosi  $m - n$ . Macierze  $\alpha_{n \times r}$  i  $\tilde{\beta}_{m \times r} = (\beta', c_\beta')$  mają pełen rząd kolumnowy  $r$ , który jest rzędem kointegracji i oznacza liczbę relacji długookresowych definiowanych przez  $r$  liniowo niezależnych wektorów kointegrujących,  $\alpha \beta' = \sum_{i=1}^k A_i - I_n = \Pi$ ,  $\Gamma_i = -\sum_{i+1}^k A_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k - 1$ ,  $\Gamma' = (\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{k-1})$ ,  $z_t = (\Delta y'_{t-1}, \Delta y'_{t-2}, \dots, \Delta y'_{t-k+1})'$ .

W reprezentacji Beveridge'a, Nelsona (1981) procesów skointegrowanych (zob. np. Johansen, 1995):

$$y_t = \delta_t + \tau_t + \kappa_t = \delta_t + C(1) \sum_{i=0}^{t-1} \varepsilon_t + C^*(L) \varepsilon_t, \quad (4)$$

<sup>3</sup> Angielska nazwa *error correction mechanism* tłumaczona jest na język polski jako mechanizm korekty błędów (zob. np. Osiewalski, Marzec 1996–97) lub mechanizm korekty błędem (zob. np. Welfe, 2013). W niniejszej pracy postanowiono posługiwać się pierwszym z nich.

$C(1)$  jest macierzą niepełnego rzędu  $r(C(1)) = n - r$ . Trend stochastyczny  $(\tau_t)$  jest więc tworzony przez  $n - r$  procesów będących błędzeniem przypadkowym. Macierz wielomianowa  $C^*(L)$ , opisująca tzw. część cykliczną  $(\kappa_t)$ , jest nieosobliwa<sup>4</sup>.

Uwzględnienie zależności krótkookresowych prowadzi do restrykcji nałożonych na macierze  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  i/lub  $\alpha$ . Model z restrykcjami nałożonymi zarówno na macierze  $\Gamma_i$ , jak i  $\alpha$  został zaproponowany i omówiony przez Vahida, Engle'a (1993). Zadali oni pytanie, czy istnieje liniowa niezerowa kombinacja procesów skointegrowanych, która nie zawiera części cyklicznej. W odpowiedzi pokazali, że liniowe kombinacje, które eliminują autokorelację pierwszych różnic procesów stochastycznych, zastosowane do ich poziomów eliminują część cykliczną (tzn. jeżeli istnieje macierz  $\gamma_\perp$ , taka że  $\gamma'_\perp \Delta y_t = \gamma'_\perp \tilde{c} + \gamma'_\perp \varepsilon_t$ , to  $\gamma'_\perp \kappa_t = 0$ ). W reprezentacji VEC takich procesów pojawia się dodatkowa restrykcja niepełnego rzędu, nałożona na macierze parametrów opisujących dynamikę krótkookresową (zob. również Hecq i inni, 2006):

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \gamma \delta'_0 \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \gamma \delta'_1 \Delta y_{t-1} + \gamma \delta'_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \gamma \delta'_{k-1} \Delta y_{t-k+1} + \tilde{c} + \varepsilon_t \\ &= \gamma \delta' \tilde{z}_t + \tilde{c} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iiN(0, \Sigma), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie  $\tilde{z}_t = (\tilde{y}'_{t-1} \tilde{\beta}' \quad z'_t)'$ ,  $\delta' = (\delta'_0, \delta'_1, \dots, \delta'_{k-1})$ . Macierze  $\gamma$  i  $\delta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k - 1$  mają  $n - s$  kolumn,  $\gamma'_\perp \gamma = 0$ ,  $\gamma'_\perp \gamma_\perp = 0$ ,  $r(\gamma) = n - s$ ,  $s$  jest liczbą liniowo niezależnych wektorów cech wspólnych, tj. wektorów eliminujących autokorelację przyrostów oraz część cykliczną poziomów (ang. *co-feature vectors*)<sup>5</sup>. Wektory te są elementami przestrzeni rozpinanej przez dopełnienie ortogonalne macierzy  $\gamma$ . Wspólne czynniki krótkookresowe  $(f_t)$  są liniową kombinacją  $\tilde{z}_t$ :  $f_t = \delta' \tilde{z}_t$ . Jeżeli krótkookresowe zachowanie analizowanych wielkości sterowane jest wspólnymi czynnikami cyklicznymi, wówczas ich reakcja na egzogeniczne zaburzenie losowe jest współliniowa.

Hecq i inni (2006) wyżej opisanym zależnościom krótkookresowym nadali nazwę silnej odmiany struktur zredukowanego rzędu (ang. *strong form reduced rank structures*, SF). Dodatkowo rozważyli oni słabszy typ krótkookresowej zależności, kiedy to istnieje co najmniej jedna liniowa kombinacja pierwszych przyrostów procesów skorygowanych o zależności długookresowe i składowe deterministyczne  $(\Delta y_t - \alpha \beta' y_{t-1} - \tilde{c} - \alpha c'_\beta d_{t-1})$ , będąca białym szumem (tj. istnieje macierz  $\gamma_\perp$  taka, że  $\gamma'_\perp (\Delta y_t - \alpha \beta' y_{t-1} - \tilde{c} - \alpha c'_\beta d_{t-1}) = \gamma'_\perp \varepsilon_t$ ). Zależności te nazwali strukturami zredukowanego rzędu słabej postaci (ang. *weak form reduced rank structures*, WF). Reprezentacja VEC takich procesów przedstawia się następująco:

<sup>4</sup> Symbolem  $\delta t$  oznaczono składową deterministyczną procesu  $y_t$ . Parametry dekompozycji Beveridge'a i Nelsona są funkcjami parametrów reprezentacji VEC rozważanego procesu.

<sup>5</sup> Jak wspomniano, wektory cech wspólnych usuwają część cykliczną w reprezentacji Beveridge'a, Nelsona, dlatego też rozważane modele nazywane są również modelami ze wspólnymi czynnikami cyklicznymi. Należy jednak pamiętać, by nie przypisywać im znaczenia cykli koninkulturalnych, lecz jedynie łączyć ze zredukowaną liczbą wspólnych czynników sterujących zachowaniem krótkookresowej składowej wspomnianej dekompozycji (zob. np. Vahid, Engle, 1993; Cubadda, 1999).

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \gamma \delta'_1 \Delta y_{t-1} + \gamma \delta'_2 \Delta y_{t-2} + \dots + \gamma \delta'_{k-1} \Delta y_{t-k+1} + \tilde{c} + \varepsilon_t \\ &= \alpha \tilde{\beta}' \tilde{y}_{t-1} + \gamma \tilde{\delta}' z_t + \tilde{c} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim iiN(0, \Sigma), \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $\tilde{\delta}' = (\delta'_1, \delta'_2, \dots, \delta'_{k-1})$ , a pozostałe oznaczenia są takie jak w równaniu (5). Można pokazać (zob. np. Cubadda, 2007), że macierz wielomianowa  $\gamma_{\perp}(L) = \gamma_{\perp} - (\beta \alpha' + I_n) \gamma_{\perp} L$ , czyli taka, że  $\gamma_{\perp}(L)' y_t = \gamma'_{\perp} (\alpha c'_{\beta} d_{t-1} + \tilde{c} + \varepsilon_t)$ , znosi zależność od czasu również w części cyklicznej, tj. iloczyn  $\gamma_{\perp}(L)' \kappa_t$  jest białym szumem ( $\gamma_{\perp}(L)' \kappa_t = \gamma'_{\perp} (I_n - C(1)) \varepsilon_t$ ). Symbolem  $L$  oznaczono operator opóźnienia. Wspólne czynniki krótkookresowe są funkcją  $z_t$ :  $f_t = \tilde{\delta}' z_t$ .

W modelach z macierzami parametrów o niepełnym rzędzie, pojawia się problem identyfikowalności, gdyż ich dekompozycja na iloczyn macierzy o pełnym rzędzie nie jest jednoznaczna. Należy zatem wprowadzić odpowiednią (zależną od wymiaru parametrów) ilość restrykcji identyfikujących. W tym opracowaniu, wykorzystamy restrykcje zaproponowane przez Strachana, Indera (2004) oraz Villanigo (2005) dla macierzy parametrów modeli VEC. Restrykcje te w estymacji parametrów modeli VEC-SF i VEC-WF (równania 5 i 6, odpowiednio) zostały wcześniej wykorzystane w pracach Wróblewskiej (2011, 2015). Opierając się na wymienionych opracowaniach przyjmujemy założenie, że macierze  $\tilde{\beta}$  i  $\gamma$  mają ortonormalne kolumny oraz nieujemne elementy w pierwszym wierszu, tj.  $\tilde{\beta}' \tilde{\beta} = I_r$ ,  $\tilde{\beta}[1, i] \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$  oraz  $\gamma' \gamma = I_{n-s}$ ,  $\gamma[1, i] \geq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n - s$ .

Do estymacji parametrów i ich funkcji wykorzystane zostanie wnioskowanie bayesowskie. Dla pełnej specyfikacji wyżej omówionych modeli VEC – równanie (3), VEC-SF – równanie (5) i VEC-WF – równanie (6), należy dodatkowo wprowadzić rozkłady *a priori* parametrów. Rozkłady te przyjmujemy opierając się na pracach Koopa i innych (2010) oraz Wróblewskiej (2011, 2015), które w przypadku modeli VEC i VEC-WF pozwolą wykorzystać próbnik Gibbsa do uzyskania próby pseudolosowej z rozkładów *a posteriori*. W modelach VEC-SF dodatkowo konieczne będzie zastosowanie algorytmu Metropolisa i Hastingsa w jednym z kroków próbnika Gibbsa. Wprowadzając rozkłady dla macierzy parametrów tworzących iloczyny  $\alpha \tilde{\beta}'$ ,  $\gamma \delta'$  oraz  $\gamma \tilde{\delta}'$  wykorzystamy następujące tożsamości:  $A \tilde{B}' \equiv \alpha \tilde{\beta}'$ ,  $G D' \equiv \gamma \delta'$ ,  $G \tilde{D}' \equiv \gamma \tilde{\delta}'$ , w których na macierze oznaczone literami alfabetu łacińskiego nie nakładamy żadnych restrykcji, a macierze oznaczone literami greckimi mają spełniać wyżej wymienione warunki, co<sub>1</sub> uzyskamy przyjmując  $\tilde{\beta} = \tilde{B}(\tilde{B}' \tilde{B})^{-\frac{1}{2}}$ ,  $\alpha = A(\tilde{B}' \tilde{B})^{\frac{1}{2}}$ ,  $\gamma = G(G' G)^{-\frac{1}{2}}$ ,  $D = D(G' G)^{\frac{1}{2}}$ ,  $\tilde{D} = \tilde{D}(G' G)^{\frac{1}{2}}$  oraz dodatkowo odpowiednio korygując znaki (by zapoznać się ze szczegółami omawianej procedury zob. wyżej wymienione prace).

Dokładna struktura *a priori* rozważanych modeli została przedstawiona w tabeli 1, w której przyjęto następujące oznaczenia:

- $mN(\mu, \Omega_1, \Omega_2)$  – macierzowy rozkład normalny o wartości oczekiwanej  $vec(\mu)$  i macierzy kowariancji  $\Omega_1 \otimes \Omega_2$  dla wektoryzacji macierzy,
- $IW(S, q)$  – odwrotny rozkład Wisharta o  $q$  stopniach swobody i parametrze  $S$ , będącym dodatnio określoną symetryczną macierzą kwadratową stopnia  $n$ .

- *MACG(P)* – macierzowy kątowy rozkład Gaussa (ang. *matrix angular central Gaussian distribution*) o parametrze  $P$ , będącym dodatnio określoną symetryczną macierzą kwadratową stopnia  $m$ . Jest to rozkład zdefiniowany dla macierzy o ortonormalnych kolumnach. Dla  $P = I_m$  otrzymujemy rozkład jednostajny (zob. np. Chikuse, 2002), a więc rozkłady *a priori*  $\tilde{B} \sim mN(0, I_r, I_m)$ ,  $G \sim mN(0, I_{3-s}, I_3)$  prowadzą do jednostajnych rozkładów dla  $\tilde{\beta}$  i  $\gamma$  odpowiednio.

Wszystkie rozkłady zostały ucięte warunkiem stabilności oraz restrykcjami nałożonymi na znaki elementów macierzy  $\tilde{\beta}$  i  $\gamma$ .

Tabela 1.

Struktura *a priori* rozważanych bayesowskich modeli typu VEC

Macierze parametrów	Model		
	VEC	VEC-WF	VEC-SF
A	$A \Sigma \sim mN(0, I_r, \Sigma)$		-
$\tilde{B}$	$\tilde{B} \sim mN(0, I_r, I_m)$		
$\tilde{\beta}$	-	-	$\tilde{\beta} \sim \text{MACG}(I_m)$
$\Gamma$	$\Gamma \Sigma \sim mN(0, \Sigma, I_{n(k-1)})$	-	-
$\tilde{c}$	$\tilde{c} \Sigma \sim N(0, \Sigma)$		
$\Sigma$	$\Sigma \sim iW(0, 2 I_n, n + 1)$		
G	-	$G \Sigma \sim mN(0, I_{n-s}, \Sigma)$	
D	-	-	$D \sim mN(0, I_{n-s}, I_{n(k-1)+r})$
$\tilde{D}$	-	$\tilde{D} \sim mN(0, I_{n-s}, I_{n(k-1)})$	-

Źródło: opracowanie własne.

Otrzymane rozkłady *a posteriori* oraz  $p(y)$  lub  $p(y|\cdot)$  zebrano w tabeli 2.

Tabela 2.

Warunkowe rozkłady *a posteriori* otrzymane w rozważanych bayesowskich modelach typu VEC oraz  $p(y)$  lub  $p(y|\cdot)$

Model	Warunkowe rozkłady <i>a posteriori</i>	$p(y)$ lub $p(y \cdot)$
<p><b>VEC</b>, <math>0 &lt; r &lt; n</math></p> $Z_0 = Z_1 \tilde{B} A' + Z_2 \Gamma + i\tilde{c} + E = Z_B \Gamma_A + E,$ $Z_B = (Z_1 \tilde{B}, Z_2 \Gamma), \quad \Gamma_A = \begin{pmatrix} A' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$	<p><math>\Sigma   \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma_A' \Gamma_A, nk + 2 + T + r)</math></p> $\Gamma_A   \cdot, y \sim mN(\tilde{\mu}_{\Gamma_A}, \Sigma, \tilde{\Omega}_{\Gamma_A})$ $\tilde{\Omega}_{\Gamma_A} = (Z_B' Z_B + I_{n(k-1)+1+r})^{-1}, \tilde{\mu}_{\Gamma_A} = \tilde{\Omega}_{\Gamma_A} Z_B' Z_0$	$p(y B) = c  \tilde{\Omega}_{\Gamma_A} ^{n/2}  0, 2I_n + Z_0' M_{Z_B} Z_0 + \tilde{\Gamma}_A' Z_B' Z_B \tilde{\Omega}_{\Gamma_A} \tilde{\Gamma}_A ^{-(n+1+T)/2}$ $M_{Z_B} = I_T - Z_B (Z_B' Z_B)^{-1} Z_B'$ $\tilde{\Gamma}_A = (Z_B' Z_B)^{-1} Z_B' Z_0$
<p><b>VEC-WF</b>, <math>0 &lt; r &lt; n</math></p> $Z_0 = Z_1 \tilde{B} A' + Z_2 \tilde{D} G' + i\tilde{c} + E = Z_{B\tilde{D}} \Gamma_{AG} + E,$ $Z_{B\tilde{D}} = (Z_1 \tilde{B}, Z_2 \tilde{D}, i), \quad \Gamma_{AG} = \begin{pmatrix} A' \\ G' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$	<p><math>\Sigma   \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma_{AG}' \Gamma_{AG}, 2(n+1) + T + r - s)</math></p> $\Gamma_{AG}   \cdot, y \sim mN(\tilde{\mu}_{AG}, \Sigma, \tilde{\Omega}_{AG})$ $\tilde{\Omega}_{AG} = (Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}} + I_{n-s+1+r})^{-1}, \tilde{\mu}_{AG} = \tilde{\Omega}_{AG} Z_{B\tilde{D}}' Z_0$ $vec(\tilde{B})   \cdot, y \sim N(\tilde{\mu}_B, \tilde{\Omega}_B)$ $\tilde{\Omega}_B = [(A' \Sigma^{-1} A) \otimes (Z_1' Z_1 + I_{mr})]^{-1}$ $\tilde{\mu}_B = \tilde{\Omega}_B vec[Z_1'(Z_0 - Z_2 \tilde{D} G' - i\tilde{c}) \Sigma^{-1} A]$ $vec(\tilde{D})   \cdot, y \sim N(\tilde{\mu}_D, \tilde{\Omega}_D)$ $\tilde{\Omega}_D = [(G' \Sigma^{-1} G) \otimes (Z_2' Z_2 + I_{n(n-s)(k-1)})]^{-1}$ $\tilde{\mu}_D = \tilde{\Omega}_D vec[Z_2'(Z_0 - Z_1 \tilde{B} A' - i\tilde{c}) \Sigma^{-1} G]$	$p(y \tilde{B}, \tilde{D}) = c  \tilde{\Omega}_{AG} ^{n/2}  0, 2I_n + Z_0' M_{Z_{B\tilde{D}}} Z_0 + \tilde{\Gamma}_{AG}' Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}} \tilde{\Omega}_{AG} \tilde{\Gamma}_{AG} ^{-(n+1+T)/2}$ $M_{Z_{B\tilde{D}}} = I_T - Z_{B\tilde{D}} (Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}})^{-1} Z_{B\tilde{D}}'$ $\tilde{\Gamma}_{AG} = (Z_{B\tilde{D}}' Z_{B\tilde{D}})^{-1} Z_{B\tilde{D}}' Z_0$

Tabela 2. (cd.)

Model	Warunkowe rozkłady a posteriori	$p(y)$ lub $p(y \cdot)$
<p><b>VEC-SF, <math>0 &lt; r &lt; n</math></b></p> $Z_0 = (Z_1\tilde{\beta}, Z_2)DG' + i\tilde{c} + E = Z_{\beta D}I_G + E,$ $Z_{\beta D} = [(Z_1\tilde{\beta}, Z_2)D], \Gamma_G = \begin{pmatrix} G' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$ $D_{(r+n(k-1)) \times q} = \begin{pmatrix} D_{(1)} \\ D_{(2)} \end{pmatrix}$ <p><math>D_{(1)}</math> – macierz wymiaru <math>r \times q</math>  <math>D_{(2)}</math> – macierz wymiaru <math>n(k-1) \times q</math></p>	<p><math>\Sigma   \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma'_G \Gamma_G, 2(n+1) + T - s)</math></p> $\Gamma_G   \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{\Gamma_G}, \Sigma, \bar{\Omega}_{\Gamma_G})$ $\bar{\Omega}_{\Gamma_G} = (Z'_{\beta D} Z_{\beta D} + I_{n-s+1})^{-1}, \bar{\mu}_{\Gamma_G} = \bar{\Omega}_{\Gamma_G} Z'_{\beta D} Z_0$ $\text{vec}(D)   \cdot, y \sim N(\bar{\mu}_D, \bar{\Omega}_D)$ $\bar{\Omega}_D = [(G'\Sigma^{-1}G) \otimes (Z'_{\beta} Z_{\beta}) + I_{(n-s)(r+n(k-1))}]^{-1}$ $\bar{\mu}_D = \bar{\Omega}_D \text{vec} [Z'_{\beta} (Z_0 - i\tilde{c})\Sigma^{-1}G], Z_{\beta} = (Z_1\tilde{\beta}, Z_2)$ $\tilde{\beta}   \cdot, y \sim mBMF \left( Z'_1 Z_1, -\frac{1}{2} D_{(1)} G' \Sigma^{-1} G D_{(1)}, F \right)$ $F = Z'_1 (Z_0 - Z_2 D_{(2)} G' - i\tilde{c}) G' D_{(1)}$	$p(y \beta, D) = c  \bar{\Omega}_{\Gamma_G} ^{n/2}  0, 2I_n + Z'_0 M_Z Z_0 + \Gamma'_G Z'_{\beta D} Z_{\beta D} \bar{\Omega}_{\Gamma_G} \Gamma_G ^{-(n+1+T)/2}$ $M_Z Z_{\beta D} = I_T - Z_{\beta D} (Z'_{\beta D} Z_{\beta D})^{-1} Z'_{\beta D},$ $\hat{\Gamma}_G = (Z'_{\beta D} Z_{\beta D})^{-1} Z'_{\beta D} Z_0$
<p><b>VEC, <math>r = n</math></b></p> $Z_0 = Z_1 \Pi' + Z_2 \Gamma + i\tilde{c} + E = Z \Gamma_{\Pi} + E,$ $Z = (Z_1, Z_2, i), \Gamma_{\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi' \\ \Gamma \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$	<p><math>\Sigma   \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma'_\Pi \Gamma_{\Pi}, n(k+1) + 2 + T)</math></p> $\Gamma_{\Pi}   \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{\Gamma_{\Pi}}, \Sigma, \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}})$ $\bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} = (Z'Z + I_{n(k+1)})^{-1}, \bar{\mu}_{\Gamma_{\Pi}} = \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} Z' Z_0$	$p(y) = c  \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} ^{n/2}  0, 2I_n + Z'_0 M_Z Z_0 + \hat{\Gamma}'_{\Pi} Z' Z \bar{\Omega}_{\Gamma_{\Pi}} \hat{\Gamma}_{\Pi} ^{-(n+1+T)/2}$ $M_Z = I_T - Z(Z'Z)^{-1} Z', \hat{\Gamma}_{\Pi} = (Z'Z)^{-1} Z' Z_0$
<p><b>VEC-WF, <math>r = n</math></b></p> $Z_0 = Z_1 \Pi' + Z_2 \bar{D} G' + i\tilde{c} + E = \bar{Z} \Gamma_G + E,$ $Z_{\bar{D}} = (Z_1, Z_2 \bar{D}, i), \Gamma_{G\Pi} = \begin{pmatrix} \Pi' \\ G' \\ \tilde{c} \end{pmatrix}$	<p><math>\Sigma   \cdot, y \sim iW(0, 2I_n + E'E + \Gamma'_{G\Pi} \Gamma_{G\Pi}, 3n + T - s + 2)</math></p> $\Gamma_{G\Pi}   \cdot, y \sim mN(\bar{\mu}_{G\Pi}, \Sigma, \bar{\Omega}_{G\Pi})$ $\bar{\Omega}_{G\Pi} = (Z'_{\bar{D}} Z_{\bar{D}} + I_{2n-s+1})^{-1}, \bar{\mu}_{G\Pi} = \bar{\Omega}_{G\Pi} Z'_{\bar{D}} Z_0$ $\bar{\Omega}_{\bar{D}} = [(G'\Sigma^{-1}G) \otimes (Z'_2 Z_2 + I_{n(n-s)(k-1)})]^{-1}$ $\bar{\mu}_{\bar{D}} = \bar{\Omega}_{\bar{D}} \text{vec} [Z'_2 (Z_0 - Z_1 \Pi' - i\tilde{c}) \Sigma^{-1} G]$	$p(y \bar{D}) = c  \bar{\Omega}_{G\Pi} ^{n/2}  0, 2I_n + Z'_0 M_Z Z_0 + \hat{\Gamma}'_{G\Pi} Z'_{\bar{D}} Z_{\bar{D}} \bar{\Omega}_{G\Pi} \hat{\Gamma}_{G\Pi} ^{-(n+1+T)/2}$ $M_Z Z_{\bar{D}} = I_T - Z_{\bar{D}} (Z'_{\bar{D}} Z_{\bar{D}})^{-1} Z'_{\bar{D}},$ $\hat{\Gamma}_{G\Pi} = (Z'_{\bar{D}} Z_{\bar{D}})^{-1} Z'_{\bar{D}} Z_0$



Opisy do tabeli 2:

Oznaczenia wspólne dla wszystkich modeli:  $Z_0 = (\Delta y_1, \Delta y_2, \dots, \Delta y_T)'$ ,  $Z_1 = (\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_{T-1})'$ ,  $Z_2 = (z_1, z_2, \dots, z_T)'$ ,  $t_{T \times 1} = (1, 1, \dots, 1)'$ ,  $\text{vec}(M)$  – wektoryzacja macierzy  $M$ ,  $c = \pi^{-\frac{nT}{2}} |0, 2I_n|^{\frac{n+1}{2}} \prod_{i=1}^n \frac{\Gamma[(n+2+T-i)/2]}{\Gamma[(n+2-i)/2]}$ ,  $\Gamma[a]$  – wartość funkcji gamma Eulera w punkcie  $a$ .

Dla  $r = n$  modele VEC-WF oraz VEC-SF są obserwacyjnie równoważne.

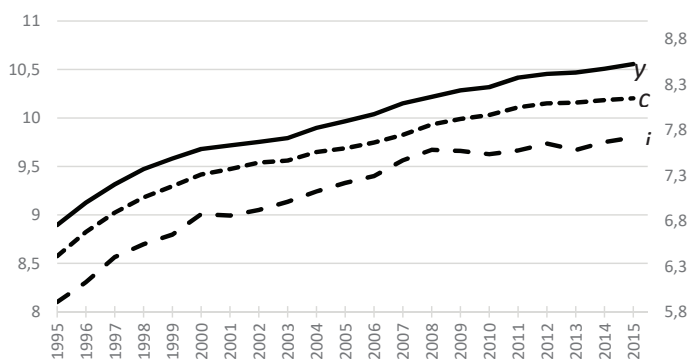
$\tilde{\beta} | \cdot, y \sim mBMF \left( Z_1' Z_1, -\frac{1}{2} D_{(1)} G' \Sigma^{-1} G D_{(1)}, F \right)$  – warunkowym rozkładem *a posteriori* dla  $\tilde{\beta}$  jest macierzowy rozkład Bingham, von Misesa, Fishera, zwany również macierzowym rozkładem Langevina, Bingham, zdefiniowany dla macierzy o ortonormalnych kolumnach (zob. np. Chikuse, 2002).

Źródło: opracowanie własne.

Po przedstawieniu celu badania i wykorzystanych w nim narzędzi przejdziemy do omówienia analizowanych danych i uzyskanych rezultatów.

#### 4. DANE I REZULTATY EMPIRYCZNE

Badanie zostało przeprowadzane z wykorzystaniem 21 rocznych obserwacji z lat 1995–2015, dotyczących realnych wielkości wydatków konsumpcyjnych ( $C$  w zł na osobę), prywatnych inwestycji krajowych ( $I$  w zł na osobę) oraz produktu krajowego brutto pomniejszonego o wielkość wydatków rządowych ( $Y$  w zł na osobę). Małymi literami ( $c, i, y$ ) oznaczono logarytm naturalny oryginalnych wielkości. Analizowane szeregi prezentuje rysunek 1.



Rysunek 1. Analizowane szeregi czasowe. Logarytmy PKB ( $y$ ) i wydatków konsumpcyjnych ( $c$ ) – lewa oś, logarytm nakładów inwestycyjnych ( $i$ ) – prawa oś

Źródło: opracowanie własne, na podstawie danych z bazy Eurostat.

Ogólna tendencja rozwojowa badanych wielkości jest podobna, przy czym inwestycje charakteryzują się większymi wahaniami. Wydaje się jednak, że spadki i wzrosty przypadają w tym samym czasie, warto więc wykorzystując narzędzia statystyczne, zbadać czy analizowany 3-wymiarowy szereg czasowy może być uznany za realizację procesu sterowanego wspólnymi trendami stochastycznymi i wspólnymi czynnikami cyklicznymi.

Jak zaznaczono w rozdziale 2, narzędziem wykorzystanym w badaniu jest grupa bayesowskich modeli VAR. Z uwagi na bardzo małą liczbę obserwacji w każdym rozważanym modelu występowały jedynie 2 opóźnienia ( $k = 2$ ). Modele mogły się różnić rodzajem składowych deterministycznych ( $d = 1$  – nieograniczony trend i stała,  $d = 2$  – trend ograniczony do przestrzeni kointegrującej, nieograniczona stała,  $d = 3$  – nieograniczona stała,  $d = 4$  – stała ograniczona do przestrzeni kointegrującej,  $d = 5$  – brak składowych deterministycznych), typem wspólnych czynników cyklicznych ( $typ = 1$  – silne wspólne czynniki cykliczne,  $typ = 2$  – słabe wspólne czynniki cykliczne,  $typ = 3$  – model bez wspólnych czynników cyklicznych), liczbą relacji kointegrujących ( $r \in \{1,2,3\}$ ,  $r = 3$  – stabilny model VAR dla poziomów, w którym założono, że  $\Pi' = A$ , a  $B = I_n$ ) oraz liczbą wspólnych czynników cyklicznych ( $n - s \in \{1,2,3\}$ ,  $(n - s = 3) \equiv (typ = 3)$ ). Po wykluczeniu modeli równoważnych oraz kombinacji niemożliwych zostało 59 parami wykluczających się modeli, dla których przyjęto równe prawdopodobieństwa *a priori* ( $p(M_{(2,d,typ,n-s,r)}) = 1/59 \approx 0,017$ ). Wyznaczając brzegową gęstość wektora obserwacji,  $p(y|M_{(2,d,typ,n-s,r)})$ , wykorzystano całkowanie analityczne (zob. tabelę 2) uzupełnione całkowaniem numerycznym wykorzystującym estymator średniej arytmetycznej.

W tabeli 3 zebrano modele o prawdopodobieństwie *a posteriori* nie niższym niż  $1/59$ . Łącznie zebrały one około 0,934 prawdopodobieństwa *a posteriori*. Dodatkowo w tabeli 4 zebrano brzegowe prawdopodobieństwa *a posteriori* liczby relacji kointegrujących oraz liczby wspólnych czynników cyklicznych.

Tabela 3.

Modele o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori* ( $p(M_{(2,d,typ,n-s,r)}|Y) > 0,02$ )

$k$	$d$	$typ$	$n - s$	$r$	$p(M_{(2,d,typ,n-s,r)} Y)$
2	4	1	1	1	0,188
2	4	1	2	1	0,110
2	3	1	1	1	0,110
2	4	2	2	1	0,084
2	2	1	1	1	0,083
2	4	2	1	1	0,075
2	4	3	3	1	0,074
2	3	1	2	1	0,046
2	3	2	1	1	0,033
2	3	3	3	1	0,033
2	3	2	2	1	0,032
2	4	1	2	2	0,025
2	5	1	1	1	0,022
2	2	1	2	1	0,021

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem całkowania analitycznego połączonego z całkowaniem numerycznym wykorzystującym estymator średniej arytmetycznej.

Tabela 4.

Brzegowe prawdopodobieństwo *a posteriori* liczby relacji kointegrujących  $p(r|Y)$   
i liczby wspólnych czynników cyklicznych  $p(n - s|Y)$

$r$	1	2	3	$n - s$	1	2	3
$p(r Y)$	0,931	0,067	0,002	$p(n - s Y)$	0,529	0,347	0,124

Źródło: opracowanie własne.

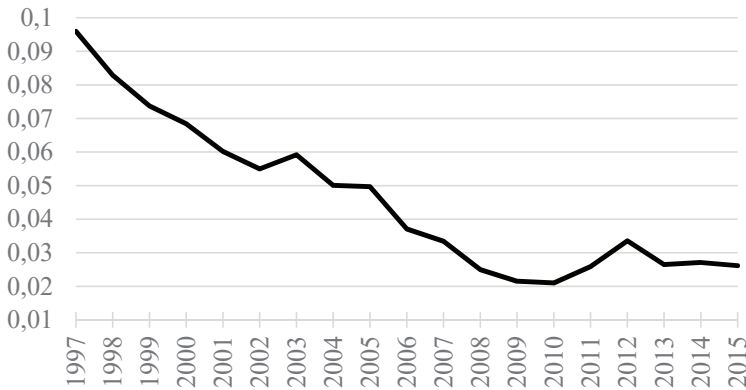
Model bez wspólnych czynników cyklicznych jest dopiero na siódmym miejscu tabeli 3 z prawdopodobieństwem *a posteriori* nieco wyższym niż 0,07. Ogółem modele bez restrykcji krótkookresowych zebrały 0,124 prawdopodobieństwa *a posteriori* (zob. tabelę 4), tak więc dane mocno wspierają hipotezę mówiącą, że przebieg analizowanych szeregów jest sterowany wspólnymi czynnikami cyklicznymi.

Informacja dotycząca rozkładu prawdopodobieństwa *a posteriori* liczby liniowo niezależnych wektorów kointegrujących pozwala zbadać kowariancyjną stacjonarność 3-wymiarowego procesu. Modele z macierzą mnożników długookresowych pełnego rzędu ( $r = 3$ ) łącznie zebrały około 0,003 prawdopodobieństwa *a posteriori*, a więc analizowany szereg można uznać za realizację procesu niestacjonarnego. Model z dwiema relacjami kointegrującymi został sklasyfikowany dopiero na dwunastym miejscu z prawdopodobieństwem *a posteriori* wynoszącym 0,025. Uzyskane rezultaty wskazują zatem na występowanie dwóch wspólnych trendów stochastycznych sterujących zachowaniem analizowanego 3-wymiarowego procesu. Można podać kilka przyczyn takiego, niezgodnego z przedstawioną teorią, rezultatu. Pierwszy związany jest z długością szeregu – analizowany szereg jest krótki, co może istotnie obniżać prawdopodobieństwo „wykrycia” wszystkich relacji długookresowych. Po drugie, model może być zbyt mały (są tylko 3 zmienne) – pominięcie istotnej zmiennej może przejawiać się występowaniem dodatkowego trendu stochastycznego. I po trzecie, King i inni (1991) sygnalizują, że w analizie wielowymiarowego szeregu zawierającego produkcję, konsumpcję i inwestycje niekiedy można spodziewać się dodatkowego uporczywego (a nawet trwałego) wstrząsu, który wpływa na podział dochodów pomiędzy konsumpcję i inwestycje.

W dalszej części badania wykorzystano model o najwyższym prawdopodobieństwie *a posteriori*, tj. model z jedną relacją kointegrującą, jednym wspólnym czynnikiem cyklicznym silnego typu i stałą ograniczoną do przestrzeni kointegrującej.

Wspólny czynnik krótkookresowy jest funkcją obserwacji, a jego ocena punktowa została przedstawiona na rysunku 2.

W modelu VEC dla trzech zmiennych z jedną relacją kointegrującą możemy wyróżnić dwa wstrząsy długookresowe oraz jeden wstrząs przejściowy. Rozważane wstrząsy są nieskorelowane. W tabeli 5 zaprezentowano udział wstrząsu krótkookresowego w wyjaśnianiu wariacji błędu prognoz analizowanych zmiennych.



Rysunek 2. Wspólny czynnik krótkookresowy  
Wartość oczekiwana *a posteriori*.

Źródło: opracowanie własne na podstawie 1 mln losowań po odrzuceniu 1 mln cykli wstępnych.

Tabela 5.

Dekompozycja wariancji błędu prognoz model  $M_{(2,4,1,1,1)}$

Horyzont	Udział wstrząsu krótkookresowego w wyjaśnianiu wariancji błędu prognoz (%)					
	<i>c</i>		<i>i</i>		<i>y</i>	
1	36,83	(22,00)	46,01	(22,19)	42,41	(23,09)
2	38,78	(22,89)	50,19	(22,74)	44,15	(23,93)
3	38,90	(23,40)	52,31	(23,15)	44,16	(24,68)
4	38,20	(23,62)	53,38	(23,33)	43,42	(25,25)
5	37,12	(23,67)	53,79	(23,38)	42,37	(25,72)
10	30,80	(23,05)	50,75	(23,32)	36,64	(27,07)
20	13,64	(15,31)	25,81	(20,63)	15,62	(16,85)

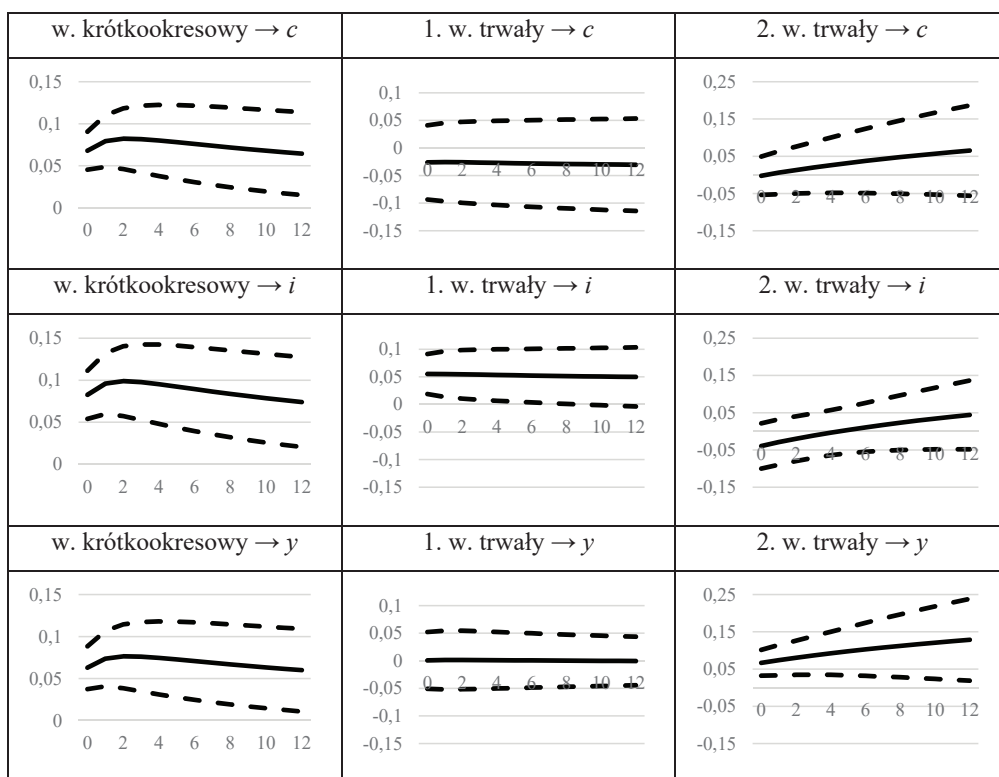
Wartość oczekiwana *a posteriori*. W nawiasach podano odchylenia standardowe *a posteriori*.

Źródło: opracowanie własne na podstawie 1 mln losowań po odrzuceniu 1 mln cykli wstępnych.

Mimo dużej niepewności estymacji, otrzymane rezultaty sugerują, że innowacje krótkookresowe mają największy wpływ na zmienność inwestycji, a punktowa ocena wskazuje, że wynosi on około 52 procent w prognozie o horyzoncie 3 lat. Inwestycje są dużo bardziej wrażliwe na wahania cykliczne i rzeczywiście udział wstrząsu przejściowego w wyjaśnianiu wariancji prognoz konsumpcji i produkcji jest niższy i wynosi, dla tego samego horyzontu prognozy, około 39 procent dla konsumpcji oraz 44 dla produkcji. Wraz z wydłużaniem horyzontu prognozy obserwujemy powolny wzrost znaczenia wstrząsów długookresowych.<sup>6</sup>

<sup>6</sup> Dla porównania oszacowano również najbardziej prawdopodobny model bez restrykcji wspólnych czynników cyklicznych, tj.  $M_{(2,4,3,3,1)}$ . W modelu tym wpływ wstrząsów przejściowych spadał dużo szyb-

Warto również prześledzić wpływ wyżej wspomnianych wstrząsów na analizowane wielkości. W tym celu oszacowano funkcje reakcji na zaburzenia losowe. Jak wspomniano w modelu mamy dwa wstrząsy długookresowe i jeden krótkookresowy, którego wpływ zanika wraz z upływem czasu, w przeciwieństwie do wpływu wstrząsów trwałych. Ta cecha pozwala nam odróżnić te dwie grupy, by jednak zidentyfikować wstrząsy długookresowe potrzebne są dodatkowe restrykcje (zob. np. Lütkepohl, 2007, str. 368–372). W tym opracowaniu wykorzystano restrykcję zerową – założono, że wpływ pierwszego wstrząsu trwałego na produkcję zanika po nieskończenie wielu okresach. Na rysunku 3 zaprezentowano wartość oczekiwaną *a posteriori* (linia ciągła) wraz z obszarem oddalonym od punktowej oceny o +/- jedno odchylenie standardowe *a posteriori* (linia przerywana). W kolumnach, a więc dla poszczególnych wstrząsów, zachowano tę samą skalę.



Rysunek 3. Funkcje reakcji na zaburzenia losowe

Wartość oczekiwana *a posteriori* – linia ciągła, +/- odchylenie standardowe *a posteriori* – linia przerywana.

Źródło: opracowanie własne na podstawie 1 mln losowań po odrzuceniu 1 mln cykli wstępnych.

ciej, np. udział zaburzeń krótkookresowych w wyjaśnianiu wariacji błędu prognozy o horyzoncie 10 dla inwestycji wynosił około 41%, a dla konsumpcji i produkcji po około 20%, natomiast dla prognozy o horyzoncie 20 – 18% i 7%, odpowiednio.

Wstrząs krótkookresowy, w okresie 12 lat, wywiera dodatni efekt na wszystkie analizowane zmienne, a zanikanie jego oddziaływania jest bardzo wolne. Analizując oceny funkcji reakcji na dwa wyróżnione wstrząsy długookresowe, zauważmy, że drugi wstrząs w okresie 12 lat, wywiera dodatni wpływ na modelowane wielkości. Można go więc uznać za wstrząs technologiczny (zob. punkt 2 artykułu). Pierwszy wstrząs prowadzi do nieznacznego spadku konsumpcji<sup>7</sup> i wyraźnego wzrostu inwestycji. Wydaje się więc, że jest to wstrząs zmiany skłonności do konsumpcji i inwestycji, o możliwości istnienia którego, w badaniu dotyczącym gospodarki Stanów Zjednoczonych, wspominają King i inni, 1991.

## 5. PODSUMOWANIE

W niniejszym opracowaniu z wykorzystaniem teorii modelu realnego cyklu koniunkturalnego przeanalizowano naturę i zależności trzech makroekonomicznych szeregów czasowych pochodzących z gospodarki polskiej – wielkości wydatków konsumpcyjnych i prywatnych inwestycji krajowych oraz produktu krajowego brutto pomniejszonego o wydatki rządowe. Dokonując bayesowskiego porównania modeli VEC z restrykcjami nałożonymi zarówno na parametry opisujące dynamikę długo-, jak i krótkookresową wywnioskowano, że zachowanie omawianych wielkości jest sterowane za pomocą jednego wspólnego czynnika cyklicznego (co jest zgodne z przedstawioną teorią ekonomiczną) oraz dwóch wspólnych trendów stochastycznych (analizowany model RBC przewiduje wystąpienie tylko jednego trendu stochastycznego). W omawianym modelu VEC możemy zatem wyróżnić dwa wstrząsy o charakterze trwałym – by je zidentyfikować na jeden z nich nałożono restrykcję zerową, a następnie oszacowano funkcje reakcji zmiennych na tak wyznaczone wstrząsy. Wykorzystując dekompozycję wariancji błędu prognoz pokazano, że w krótkim i średnim horyzoncie czasowym wstrząsy przejściowe mają duże znaczenie w wyjaśnianiu wariancji wszystkich zmiennych, przy czym najwyższe (większe niż 50%) w przypadku inwestycji. Wątpliwości związane z liczbą wspólnych trendów stochastycznych (zob. np. dyskusję w pracy Kinga i innych, 1991) skłaniają do podjęcia dalszych badań w ramach rozszerzonego (np. o zmienne nominalne, takie jak podaż pieniądza, stopa procentowa, poziom cen) modelu RBC.

## LITERATURA

- Beveridge S., Nelson C. R., (1981), A New Approach to the Decomposition of Economic Time Series Into Permanent and Transitory Components with Particular Attention to Measurement of the Business Cycle, *Journal of Monetary Economics*, 7 (2), 151–174.
- Campbell J. Y., Mankiw N. G., (1989), Consumption, Income, and Interest Rates: Reinterpreting the Time Series Evidence, *NBER Macroeconomics Annual 1989*, 4.

<sup>7</sup> Warto zauważyć, że zero znajduje się w obszarze wyznaczonym przez odchylenie standardowe *a posteriori*.

- Centoni M., Cubadda G., (2003), Measuring the Business Cycle Effects of Permanent and Transitory Shocks in Cointegrated Time Series, *Economic Letters*, 80 (1), 45–51.
- Chikuse Y., (2002), *Statistics on Special Manifolds*, Springer, New York.
- Cubadda G., (1999), Common Serial Correlation and Common Business Cycles: A Cautious Note, *Empirical Economics*, 24 (3), 529–535.
- Cubadda G., (2007), A Unifying Framework for Analysing Common Cyclical Features in Cointegrated Time Series, *Computational Statistics & Data Analysis*, 52 (2), 896–906.
- Engle R. F., Granger C. W. J., (1987), Co-Integration and Error Correction: Representation, Estimation, and Testing, *Econometrica*, 55 (2), 251–276.
- Hecq A., Palm F. C., Urbain J-P., (2000), Permanent-Transitory Decomposition in VAR Models with Cointegration and Common Cycles, *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 62 (4), 511–532.
- Hecq A., Palm F. C., Urbain J-P., (2006), Common Cyclical Features Analysis in VAR Models with Cointegration, *Journal of Econometrics*, 132 (1), 117–141.
- Issler J. V., Vahid F., (2001), Common Cycles and the Importance of Transitory Shocks to Macroeconomic Aggregates, *Journal of Monetary Economics*, 74 (3), 449–475.
- Johansen S., (1995), *Likelihood-Based Inference in Cointegrated Vector Autoregressive Models*, Oxford University Press, New York.
- King R. G., Plosser C. I., Stock J. H., Watson M. W., (1991), Stochastic Trends and Economic Fluctuations, *The American Economic Review*, 81 (4), 819–840.
- Koop G., León-González R., Strachan R., (2010), Efficient Posterior Simulation for Cointegrated Models with Priors on the Cointegration Space, *Econometric Reviews*, 29 (2), 224–242.
- Lütkepohl H., (2007), *New Introduction to Multiple Time Series Analysis*, Springer-Verlag, Berlin.
- Osiewalski J., Marzec J., (1996–97), Integracja, kointegracja i model korekty błędu dla depozytów gospodarstw domowych, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 39–40, 51–64.
- Sims C. A., (1980), Macroeconomics and Reality, *Econometrica*, 48 (1), 1–48.
- Strachan R., Inder B., (2004), Bayesian Analysis of the Error Correction Model, *Journal of Econometrics*, 123 (2), 307–325.
- Vahid F., Engle R. F., (1993), Common Trends and Common Cycles, *Journal of Applied Econometrics*, 8 (4), 341–360.
- Villani M., (2005), Bayesian Reference Analysis of Cointegration, *Econometric Theory*, 21 (2), 326–357.
- Welfe A., (red.), (2013), *Analiza kointegracyjna w makromodelowaniu*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Wróblewska J., (2011), Bayesian Analysis of Weak Form Reduced Rank Structure in VEC Models, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics (CEJEME)*, 3 (3), 169–186.
- Wróblewska J., (2015), Common Trends and Common Cycles – Bayesian Approach, *Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics (CEJEME)*, 7 (2), 91–110.

## ANALIZA MODELU REALNEGO CYKLU KONIUNKTURALNEGO Z WYKORZYSTANIEM BAYESOWSKICH MODELI TYPU VEC

### Streszczenie

Teoria przewiduje występowanie zależności długo- i krótkookresowych dla wielu różnych wielkości ekonomicznych. Wśród przykładów można wymienić różne wersje modelu realnego cyklu koniunkturalnego (modelu RBC). Celem niniejszego opracowania jest empiryczna analiza podstawowego modelu RBC zbudowanego dla produkcji, konsumpcji i inwestycji w gospodarce polskiej w latach 1995–2015. Do zbadania tego zagadnienia wykorzystano grupę bayesowskich modeli typu VEC, w których prócz restrikcji nałożonych na parametry opisujące związki długookresowe, dodatkowo nałożono restrikcje

na parametry opisujące zależności krótkookresowe. Dokonując bayesowskiego porównania wymienionych modeli wywnioskowano, że zachowanie omawianych wielkości jest sterowane za pomocą jednego wspólnego czynnika cyklicznego oraz dwóch wspólnych trendów stochastycznych. Dodatkowo, zbadano udział wstrząsów o charakterze trwałym i przejściowym w wyjaśnianiu wariancji błędu prognoz oraz ich wpływ na analizowane zmienne.

**Słowa kluczowe:** model realnego cyklu koniunkturalnego, kointegracja, wspólne czynniki cykliczne, wnioskowanie bayesowskie

## THE ANALYSIS OF REAL BUSINESS CYCLE MODEL WITH THE USE OF BAYESIAN VEC TYPE MODELS

### Abstract

In many economic theories and models, both long- and short-run relationships between variables are in focus. It is also the case in the real business cycle model (RBC model). The main aim of the paper is empirical analysis of the basic, three-variable RBC model for the Polish data of product, private consumption and investment over the years 1995–2015. A group of Bayesian VEC models with additional short-term restrictions is employed in this research. The Bayesian model comparison leads to the conclusion that the analyzed process is driven by two stochastic trends and one common cycle. Additionally, in order to evaluate the importance of long- and short-run shocks, the forecast error variance decomposition and the impulse response functions are calculated.

**Keywords:** real business cycle model, cointegration, common cyclical features, Bayesian analysis