

DANIEL ZBRONSKI\*

## **Macierzowy model ewolucji składu ziarnowego materiału w dowolnym układzie mieląco-klasyfikującym**

### **Wprowadzenie**

Wymagany skład ziarnowy produktu rzadko kiedy może być osiągnięty w procesie jednokrotnej przeróbki mechanicznej w tym samym urządzeniu rozdrabniającym, dlatego też w różnych gałęziach przemysłu powszechnie stosowane są układy mieląco-klasyfikujące. Wielostopniowe procesy rozdrabniania i klasyfikacji umożliwiają odpowiedni dobór parametrów procesu dla zmiennego uziarnienia nadawy podawanej do układu, głównie dzięki podziałowi urządzeń na sekcje bądź też zmianie ich wielkości lub typów (Lynch 1977; Tanaka 1995; Gupta, Yan 2006; Tumidajski 2010). Rozdrobniony materiał zwykle zawiera klasy ziarnowe odpowiadające wymaganiom dotyczącym gotowego produktu. Korzystne jest zatem wstępne jego rozdzielenie na kilka klas ziarnowych, tak by wydzielić z nich żądane klasy produktu, pozostałe zaś skierować samodzielnie bądź łącznie z nadawą do tego samego lub innego urządzenia. Jeżeli liczba urządzeń mielących i klasyfikujących występujących w układzie jest duża, wówczas modelowanie procesów zachodzących w całym układzie staje się dużo bardziej skomplikowane, nawet w przypadku znanego schematu układu mieląco-klasyfikującego (King 2001). Zagadnienie to komplikuje się jeszcze bardziej, gdy konieczne jest porównanie wszystkich możliwych kombinacji położenia młynów i klasyfikatorów w danym układzie. Dotyczy to zwłaszcza wielostopniowych układów, ponieważ liczba możliwych kombinacji bardzo szybko rośnie wraz ze wzrostem liczby urządzeń wchodzących w skład układu mieląco-klasyfikującego (Mizonov i in. 1997).

---

\* Dr inż., Politechnika Częstochowska, Wydział Inżynierii Mechanicznej i Informatyki, Instytut Maszyn Ciepłych, Częstochowa; e-mail: zbronski@kkt.pcz.czyst.pl

## 1. Cel pracy

Celem pracy jest pokazanie sposobu tworzenia macierzowego modelu ewolucji składu ziarnowego materiału w dowolnym układzie mieląco-klasyfikującym, który umożliwia prognozowanie uziarnienia produktu opuszczającego wybrany stopień układu. W pracy (Zbroński 2011) szczegółowo pokazano zastosowanie tego typu modelu do opisu pracy młyna strumieniowo-fluidyzacyjnego.

## 2. Tworzenie modelu dla dowolnego układu mieląco-klasyfikującego

Założono, że układ mieląco-klasyfikujący zawiera  $m$  stopni (młynów i klasyfikatorów), liczba klas ziarnowych wynosi  $n$ , zaś gęstość składu ziarnowego nadawy wyrażona jest przez kolumnową macierz

$$\mathbf{f} = [f_j], \quad j = 1, \dots, n \quad (1)$$

gdzie:

- $j = 1$  odpowiada klasie ziarnowej o maksymalnym rozmiarze,
- $j = n$  odpowiada klasie ziarnowej o minimalnym rozmiarze.

Połączenie jednym równaniem gęstości składu ziarnowego nadawy  $\mathbf{f}$  i produktu mielenia  $\mathbf{f}'$  umożliwia macierz przejścia  $\mathbf{P}$

$$\mathbf{f}' = \mathbf{P}\mathbf{f} \quad (2)$$

Macierz przejścia  $\mathbf{P}$  jest macierzą trójkątną o postaci

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix} \quad (3)$$

w której każdy element  $p_{ij}$  wyraża prawdopodobieństwo przejścia ziaren w wyniku rozbicia  $j$ -tej klasy nadawy do  $i$ -tej klasy produktu.

Macierz klasyfikacji  $\mathbf{C}$  jest macierzą diagonalną o postaci

$$\mathbf{C} = [c_j] = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_n \end{bmatrix} \quad (4)$$

w której każdy element macierzy  $c_j$  stanowi udział masowy tej części  $j$ -tej klasy ziarnowej, która przeszła do drobnoziarnistego produktu klasyfikacji. Wynikiem procesu klasyfikacji są dwa produkty: drobnoziarnisty o gęstości składu ziarnowego  $\mathbf{f}'_d$  i gruboziarnisty o gęstości składu ziarnowego  $\mathbf{f}'_g$ , których rozkłady ziarnowe można wyznaczyć z następujących równań:

$$\mathbf{f}'_d = \mathbf{C}\mathbf{f} \quad (5)$$

$$\mathbf{f}'_g = (\mathbf{I} - \mathbf{C})\mathbf{f} \quad (6)$$

w których  $\mathbf{I}$  jest diagonalną macierzą jednostkową o postaci

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

W dalszej analizie, podobnie jak w pracy (Mizonov i in. 1997), wprowadza się macierz dowolnego stopnia układu  $\mathbf{D}_k$ ,  $k = 1, \dots, m$ , opisującą ewolucję składu ziarnowego w  $k$ -tym stopniu układu mieląco-klasyfikującego. Oznacza to, że w przypadku młyna  $\mathbf{D} = \mathbf{P}$ , w przypadku drobnego produktu klasyfikatora  $\mathbf{D} = \mathbf{C}$ , zaś w przypadku grubego produktu klasyfikatora  $\mathbf{D} = \mathbf{I} - \mathbf{C}$ . W związku z powyższym gęstość składu ziarnowego na wyjściu z  $k$ -tego stopnia układu może być wyrażona następującym równaniem

$$\mathbf{f}'_k = \mathbf{D}_k \mathbf{f}_k \quad (8)$$

W ogólnym przypadku nadawa  $\mathbf{f}_i$  doprowadzona do  $i$ -tego stopnia układu składa się z nadawy  $\mathbf{f}_{0i}$  pochodzącej ze źródła zewnętrznego oraz z produktów  $\mathbf{f}'_{ki}$  wychodzących z  $(m - 1)$  innych stopni układu. Bilans masowy populacji ziaren wchodzących do  $i$ -tego stopnia układu można zapisać w postaci

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{f}_{0i} + \mathbf{f}'_{1i} + \mathbf{f}'_{2i} + \dots + \mathbf{f}'_{i-1,i} + \mathbf{f}'_{i+1,i} + \dots + \mathbf{f}'_{mi} = \mathbf{f}_{0i} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \mathbf{f}'_{ki} \quad (9)$$

Produkt wychodzący z  $k$ -tego stopnia i wchodzący do  $i$ -tego stopnia można wyrazić równaniem

$$\mathbf{f}'_{ki} = \mathbf{D}_{ki} \mathbf{f}_k \quad (10)$$

gdzie macierz  $\mathbf{D}_{ki}$  dotyczy materiału wchodzącego do  $i$ -tego stopnia układu.

Jeśli wyjście z  $k$ -tego stopnia nie jest połączone z wejściem do  $i$ -tego stopnia układu to składnik sumy odpowiadający temu przypadkowi można pominąć jako równy zero. Podstawiając równanie (10) do wyrażenia (9) otrzymuje się po przekształceniach postać

$$-\mathbf{I}\mathbf{f}_i + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^m \mathbf{D}_{ki} \mathbf{f}_k = -\mathbf{f}_{0i} \quad (11)$$

którą można zapisać dla każdego stopnia układu, otrzymując układ  $m$  równań

$$\left. \begin{array}{r} -\mathbf{I}\mathbf{f}_1 + \mathbf{D}_{21}\mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{D}_{m1}\mathbf{f}_m = -\mathbf{f}_{01} \\ \mathbf{D}_{12}\mathbf{f}_1 - \mathbf{I}\mathbf{f}_2 + \dots + \mathbf{D}_{m2}\mathbf{f}_m = -\mathbf{f}_{02} \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ \mathbf{D}_{1m}\mathbf{f}_1 + \mathbf{D}_{2m}\mathbf{f}_2 + \dots - \mathbf{I}\mathbf{f}_m = -\mathbf{f}_{0m} \end{array} \right\} \quad (12)$$

Dla układu równań (12) można zastosować zapis macierzowy w postaci (Mizonov i in. 1997; Zbroński 2005)

$$\mathbf{M}\mathbf{F} = -\mathbf{F}_0 \quad (13)$$

w którym:

- $\mathbf{M}$  jest macierzą całego układu zawierającą  $(m \times m)$  bloków lub  $(nm) \times (mn)$  elementów opisujących ewolucję składu ziarnowego w układzie mieląco-klasyfikującym, o postaci

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{D}_{21} & \dots & \mathbf{D}_{m1} \\ \mathbf{D}_{12} & -\mathbf{I} & \dots & \mathbf{D}_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{D}_{1m} & \mathbf{D}_{2m} & \dots & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (14)$$

- $\mathbf{F}$  jest kolumnową macierzą zawierającą  $(m \times 1)$  bloków albo  $(nm \times 1)$  elementów opisujących wszystkie gęstości składu ziarnowego  $\mathbf{f}_k$  wchodzące do danych stopni układu mieląco-klasyfikującego, bez nadawy ze źródeł zewnętrznych; jest to zatem macierz nadawy stopni układu, o postaci

$$\mathbf{F} = [\mathbf{f}_k] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \dots \\ \mathbf{f}_m \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, m \quad (15)$$

Przykładowo, macierz  $\mathbf{f}_1$  zawierająca elementy 1-go bloku macierzy  $\mathbf{F}$  układu (dotyczy pierwszego stopnia układu), przy uwzględnieniu  $j$ -tej klasy ziarnowej ma postać

$$\mathbf{f}_1 = [\mathbf{f}_{1j}] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{11} \\ \mathbf{f}_{12} \\ \dots \\ \mathbf{f}_{1n} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (16)$$

—  $\mathbf{F}_0$  jest kolumnową macierzą blokową, zawierającą elementy o takim samym wymiarze jak macierz  $\mathbf{F}$ , opisujące gęstość składu ziarnowego nadawy ze źródeł zewnętrznych  $\mathbf{f}_{0k}$  podawanej do wszystkich stopni układu mieląco-klasyfikującego; jest to zatem macierz nadawy całego układu, o postaci

$$\mathbf{F}_0 = [\mathbf{f}_{0k}] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{01} \\ \mathbf{f}_{02} \\ \dots \\ \mathbf{f}_{0m} \end{bmatrix}, \quad k = 1, \dots, m \quad (17)$$

Przykładowo macierz  $\mathbf{f}_{01}$  zawierająca elementy 1-go bloku macierzy  $\mathbf{F}_0$  układu (dotyczy pierwszego stopnia układu), przy uwzględnieniu  $j$ -tej klasy ziarnowej ma postać

$$\mathbf{f}_{01} = [\mathbf{f}_{01j}] = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{011} \\ \mathbf{f}_{012} \\ \dots \\ \mathbf{f}_{01n} \end{bmatrix}, \quad j = 1, \dots, n \quad (18)$$

Równanie (13) umożliwia wyznaczenie macierzy nadawy stopni układu produktu w postaci

$$\mathbf{F} = -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_0 \quad (19)$$

gdzie  $\mathbf{M}^{-1}$  jest odwrotną macierzą  $\mathbf{M}$ .

### 3. Przykłady tworzenia macierzy blokowej całego układu

Macierz  $\mathbf{M}$  zdefiniowaną równaniem (14) można wyznaczyć stosując algorytm używany przy analizie dowolnego układu technologicznego. W postępowaniu tym stosuje się następujące założenia (Mizonov i in.1997):

1. Macierz  $\mathbf{M}$  jest kwadratową macierzą blokową o wymiarze  $(m \times m)$  bloków lub  $(nm) \times (mn)$  elementów.

2. Główna przekątna macierzy  $\mathbf{M}$  zawiera macierze jednostkowe  $\mathbf{I}$  ze znakiem minus.
3. Każda kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  odpowiada tylko jednemu stopniowi układu mieląco-klasyfikującego.
4. Jeżeli stopniem układu jest młyn, to jego macierz położona jest w wierszu o numerze tego stopnia, do którego podawany jest produkt z danego młyna (wyjście z młyna). W ten sposób w danej kolumnie macierzy  $\mathbf{M}$  znajdują się tylko dwa bloki niezerowe: macierz jednostkowa i macierz przejścia, a wszystkie pozostałe są równe zero. W przypadku, gdy produkt z młyna opuszcza układ, w danej kolumnie macierzy  $\mathbf{M}$  nie występuje macierz tego młyna.
5. Jeżeli stopniem układu jest klasyfikator, to jego macierz  $\mathbf{C}$  jest położona w wierszu o numerze tego stopnia, do którego podawany jest drobnoziarnisty produkt klasyfikacji, natomiast macierz  $\mathbf{I} - \mathbf{C}$  jest położona w wierszu o numerze stopnia, do którego podawany jest gruboziarnisty produkt klasyfikacji. Oznacza to, iż w danej kolumnie macierzy  $\mathbf{M}$  nie może być więcej niż trzy niezerowe bloki. W przypadku, gdy jeden z produktów klasyfikacji opuszcza układ, odpowiadająca mu macierz  $\mathbf{C}$  lub  $\mathbf{I} - \mathbf{C}$  nie występuje w danej kolumnie macierzy  $\mathbf{M}$ .

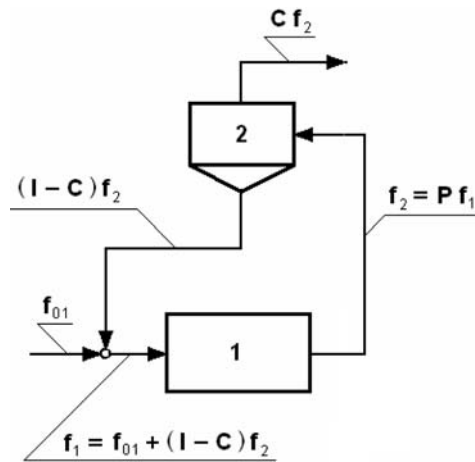
Poniżej zaprezentowano przykłady tworzenia macierzy blokowej  $\mathbf{M}$  dla wybranych układów mieląco-klasyfikujących (Tanaka 1995, Mizonov i in.1997), przedstawionych schematycznie na rysunkach 1–3.

### 3.1. Układ mieląco-klasyfikujący z jednym młynem i klasyfikatorem

W pierwszym, najprostszym układzie (rys. 1) do młyna kierowany jest wraz z nadawą ze źródła zewnętrznego (nadawa układu) gruboziarnisty produkt klasyfikacji wytrącony w klasyfikatorze. Produkt układu stanowi drobnoziarnisty produkt opuszczający klasyfikator.

Układ ten składa się z dwóch stopni ( $m = 2$ ): młyna 1 i klasyfikatora 2. Przyjęto, że nadawa i produkty składają się tylko z trzech klas ziarnowych ( $n = 3$ ), zatem macierz  $\mathbf{M}$  jest blokową macierzą o wymiarze  $(2 \times 2)$  lub zwykłą macierzą o wymiarze  $(6 \times 6)$ . Pierwsza kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną młyna. Produkt z młyna 1 kierowany jest do klasyfikatora 2, zatem macierz  $\mathbf{P}$  znajduje się na pozycji  $(1,2)$ . Druga kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną klasyfikatora. Produkt gruboziarnisty procesu klasyfikacji kierowany jest do stopnia 1 – młyna, czyli macierz  $\mathbf{I} - \mathbf{C}$  znajduje się na pozycji  $(2,1)$ , natomiast produkt drobnoziarnisty klasyfikacji opuszcza układ, stąd też macierz  $\mathbf{C}$  nie występuje w macierzy blokowej  $\mathbf{M}$ . Po podstawieniu macierzy  $\mathbf{P}$  i  $\mathbf{I} - \mathbf{C}$  w odpowiednie pozycje w macierzy blokowej  $\mathbf{M}$  równanie macierzy blokowych (13) dla rozważanego układu mieląco-klasyfikującego przyjmie postać:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I}-\mathbf{C} \\ \mathbf{P} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_{01} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (20)$$



Rys. 1. Schemat układu z jednym młynem i klasyfikatorem  
1 – młyn, 2 – klasyfikator

Fig. 1. Closed circuit of system with one mill and classifier  
1 – mill, 2 – classifier

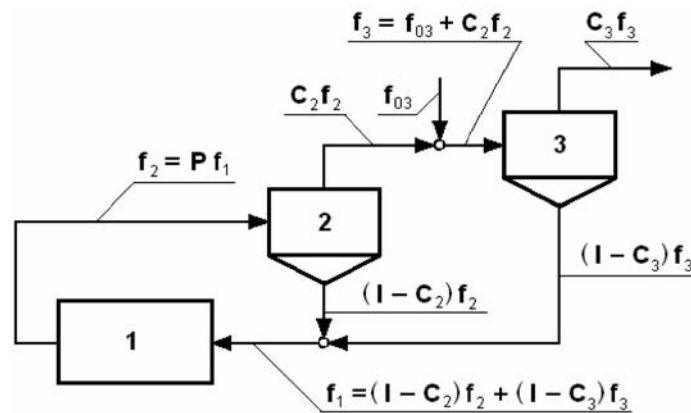
gdzie macierz nadawy układu jest jednokolumnową macierzą, zawierającą jedną macierz niezerową  $f_{01}$ , będącą macierzą nadawy ze źródła zewnętrznego, która kierowana jest do młyna (stopień 1).

Zgodnie z zapisem macierzowym równanie (20) można przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1-c_1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-c_2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-c_3 \\ p_{11} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_{011} \\ -f_{012} \\ -f_{013} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

### 3.2. Układ mieląco-klasyfikujący z jednym młynem i dwoma klasyfikatorami

W drugim układzie (rys. 2) do młyna kierowane są gruboziarniste produkty klasyfikacji wytracone w klasyfikatorze wstępnym 2 i klasyfikatorze końcowym 3. Nadawa ze źródła zewnętrznego wraz z drobnoziarnistym produktem opuszczającym klasyfikator 2 stanowi nadawę klasyfikatora 3. Produkt układu stanowi drobnoziarnisty produkt opuszczający klasyfikator 3.



Rys. 2. Schemat układu z jednym młynem i dwoma klasyfikatorami  
 1 – młyn, 2 – klasyfikator wstępny, 3 – klasyfikator końcowy

Fig. 2. Closed circuit of system with one mill and two classifiers  
 1 – mill, 2 – preliminary classifier, 3 – final classifier

Układ ten składa się z trzech stopni ( $m = 3$ ): młyna 1, klasyfikatora wstępnego 2 i klasyfikatora końcowego 3. Przyjęto, że nadawa i produkty składają się tylko z trzech klas ziarnowych ( $n = 3$ ), zatem macierz  $\mathbf{M}$  jest blokową macierzą o wymiarze  $(3 \times 3)$  lub zwykłą macierzą o wymiarze  $(9 \times 9)$ . Pierwsza kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną młyna. Produkt z młyna 1 kierowany jest do klasyfikatora 2, zatem macierz  $\mathbf{P}$  znajduje się na pozycji (1,2). Druga kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną klasyfikatora 2. Produkt gruboziarnisty procesu klasyfikacji kierowany jest do młyna, czyli macierz  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_2$  znajduje się na pozycji (2,1), natomiast produkt drobnoziarnisty klasyfikacji kierowany jest do klasyfikatora 3, czyli macierz  $\mathbf{C}_2$  znajduje się na pozycji (2,3). Trzecia kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną klasyfikatora 3. Produkt gruboziarnisty procesu klasyfikacji kierowany jest do młyna, czyli macierz  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_3$  znajduje się na pozycji (3,1), natomiast produkt drobnoziarnisty klasyfikacji opuszcza układ, stąd też macierz  $\mathbf{C}_3$  nie występuje w macierzy blokowej  $\mathbf{M}$ . Po podstawieniu macierzy  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{C}_2$ ,  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_2$  i  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_3$  do macierzy blokowej  $\mathbf{M}$  równanie macierzy blokowych (13) dla rozważanego układu mieląco-klasyfikującego przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{C}_2 & \mathbf{I} - \mathbf{C}_3 \\ \mathbf{P} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{f}_{03} \end{bmatrix} \quad (22)$$

gdzie macierz nadawy układu jest jednokolumnową macierzą, zawierającą jedną macierz niezerową  $\mathbf{f}_{03}$ , będącą macierzą nadawy ze źródła zewnętrznego, która kierowana jest do klasyfikatora końcowego 3.

Zgodnie z zapisem macierzowym równanie (22) można przedstawić w postaci:

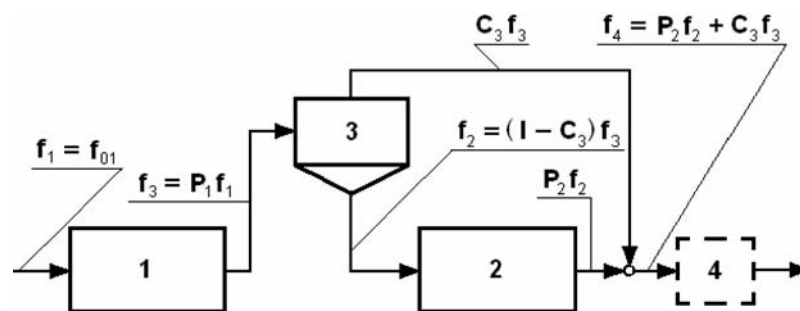


$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1-c_{21} & 0 & 0 & 1-c_{31} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1-c_{22} & 0 & 0 & 1-c_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1-c_{23} & 0 & 0 & 1-c_{33} \\ p_{11} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{21} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{22} & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{23} & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{11} \\ f_{12} \\ f_{13} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ f_{23} \\ f_{31} \\ f_{32} \\ f_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -f_{031} \\ -f_{032} \\ -f_{033} \end{bmatrix} \quad (23)$$

### 3.3. Układ mieląco-klasyfikujący z dwoma młynami i jednym klasyfikatorem oraz z dodatkowym dowolnym stopniem na wyjściu

Aby obliczyć gęstość składu ziarnowego produktu opuszczającego układ mieląco-klasyfikujący (produkt układu) należy obliczyć z równania (19) gęstość składu ziarnowego na wejściu do odpowiedniego stopnia oraz wykorzystać równanie ewolucji składu ziarnowego (8). Powyższe przekształcenia mogą być włączone do tworzenia macierzy  $\mathbf{M}$ , poprzez wprowadzenie dodatkowego stopnia na wyjściu (nie jest istotne, czy będzie to młyn czy klasyfikator) i obliczenie gęstości składu ziarnowego na wejściu do tego stopnia, który jednocześnie będzie szukanym składem ziarnowym produktu układu. Macierz  $\mathbf{M}$  powiększa się wtedy o jedną kolumnę, co pokazano poniżej.

W trzecim układzie (rys. 3) do młyna wstępnego 1 kierowana jest nadawa ze źródła zewnętrznego, będąca nadawą układu. Nadawę klasyfikatora 3 stanowi produkt opuszczający młyn 1. Wytrącony w klasyfikatorze 3 gruboziarnisty produkt przekazywany jest



Rys. 3. Schemat układu z dwoma młynami i jednym klasyfikatorem oraz z dodatkowym dowolnym stopniem na wyjściu

1 – młyn wstępny, 2 – młyn końcowy, 3 – klasyfikator, 4 – dowolny stopień (element) układu

Fig. 3. Closed circuit of system with two mills and one classifier and additional arbitrary element on exit  
1 – preliminary mill, 2 – final mill, 3 – classifier, 4 – arbitrary element of system

jako nadawa do młyna końcowego 2. Produkt układu tworzy produkt wychodzący z młyna 2 i drobnoziarnisty produkt opuszczający klasyfikator 3.

Układ ten składa się z czterech stopni ( $m = 4$ ): młyna wstępnego 1, młyna końcowego 2, klasyfikatora 3 i dowolnego stopnia 4. Przyjęto, że nadawa i produkty składają się tylko z trzech klas ziarnowych ( $n = 3$ ), zatem macierz  $\mathbf{M}$  jest blokową macierzą o wymiarze  $(4 \times 4)$  lub zwykłą macierzą o wymiarze  $(12 \times 12)$ . Pierwsza kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną młyna 1. Produkt z młyna 1 kierowany jest do klasyfikatora 3, zatem macierz  $\mathbf{P}_1$  znajduje się na pozycji (1,3). Druga kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną młyna 2. Produkt z młyna 2 kierowany jest do dowolnego stopnia 4, zatem macierz  $\mathbf{P}_2$  znajduje się na pozycji (2,4). Trzecia kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną klasyfikatora 3. Produkt gruboziarnisty procesu klasyfikacji kierowany jest do młyna 2, czyli macierz  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_3$  znajduje się na pozycji (3,2), natomiast produkt drobnoziarnisty klasyfikacji kierowany jest do dowolnego stopnia 4, zatem macierz  $\mathbf{C}_3$  znajduje się na pozycji (3,4). Czwarta kolumna macierzy  $\mathbf{M}$  jest kolumną dowolnego stopnia 4. Produkt wychodzący ze stopnia 4 opuszcza układ, stąd też ewentualna macierz (dla młyna –  $\mathbf{P}_4$ , a w przypadku klasyfikatora –  $\mathbf{C}_4$  lub  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_4$ ) nie występuje w macierzy blokowej  $\mathbf{M}$ . Po podstawieniu macierzy  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{C}_3$  i  $\mathbf{I} - \mathbf{C}_3$  do macierzy blokowej  $\mathbf{M}$  równanie macierzy blokowych (13) dla rozważanego układu mieląco-klasyfikującego przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{I} - \mathbf{C}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{P}_1 & \mathbf{0} & -\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P}_2 & \mathbf{C}_3 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{f}_{01} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (24)$$

gdzie macierz nadawy układu jest jednokolumnową macierzą, zawierającą jedną macierz niezerową  $\mathbf{f}_{01}$ , będącą macierzą nadawy ze źródła zewnętrznego, która kierowana jest do młyna wstępnego 1.

### Wnioski

1. Macierzowy model oparty na równaniu bilansu masowego populacji ziaren umożliwia prognozowanie składu ziarnowego produktu opuszczającego wybrany stopień układu mieląco-klasyfikującego. Model może być wykorzystany w modelowaniu procesów przerobczych zachodzących w dowolnym urządzeniu rozdrabniającym.
2. Prezentowane przykłady potwierdzają możliwość opisu blokowych macierzy układu w zależności od złożoności schematu układu (liczby i połączeń między stopniami).
3. Eksperymentalne wyznaczenie elementów macierzy przejścia i macierzy klasyfikacji, występującej w macierzy blokowej całego układu, wymaga przeprowadzenia analiz granulometrycznych materiału na wejściu i wyjściu do każdego stopnia układu mieląco-klasyfikującego.

## LITERATURA

- Gupta A., Yan D.S., 2006 – Mineral Processing Design and Operations: An Introduction. Elsevier B.V., 693.
- King R.P., 2001 – Modeling and Simulation of Mineral Processing Systems. Butterworth-Heinemann, 403.
- Lynch A.J., 1977 – Mineral Crushing and Grinding Circuits. Elsevier Scientific Publishing Company.
- Mizonov V., Zhukov V., Bernotat S., 1997 – Simulation of Grinding: New Approaches. ISPEU Press, Ivanovo, 108.
- Tanaka T., 1995 – Optimum Design for Fine and Ultrafine Grinding Mechanisms Using Grinding Media. Kona, vol. 13, 19–29.
- Tumidajski T., 2010 – Aktualne tendencje w opisie i modelowaniu matematycznym procesów przeróbki materiałów uziarnionych. Gosp. Sur. Min., t. 26, z. 3, s. 111–123.
- Zbroński D., 2005 – Badanie i modelowanie procesu strumieniowo-fluidalnego rozdrabniania materiałów ziarnistych. Praca doktorska, Politechnika Częstochowska, 148.
- Zbroński D., 2011 – Analiza oddziaływania wybranych parametrów procesu na osiągi młyna strumieniowo-fluidyzacyjnego. Część IV: Prognozowanie uziarnienia produktu mielenia. Gosp. Sur. Min., t. 27, z. 2, s. 43–61.

MACIERZOWY MODEL EWOLUCJI SKŁADU ZIARNOWEGO MATERIAŁU  
W DOWOLNYM UKŁADZIE MIELĄCO-KLASYFIKUJĄCYM

## Słowa kluczowe

Modelowanie, macierz blokowa, macierz przejścia, macierz klasyfikacji, skład ziarnowy, młyn, klasyfikator, obieg złożony, układ mieląco-klasyfikujący

## Streszczenie

W pracy szczegółowo omówiono sposób tworzenia macierzowego modelu ewolucji składu ziarnowego materiału w dowolnym układzie mieląco-klasyfikującym. Proponowany model oparty na równaniu bilansu masowego populacji ziaren składa się z trzech macierzy blokowych: macierzy całego układu  $\mathbf{M}$ , macierzy wejść (nadawy bądź produktu) stopni układu  $\mathbf{F}$  i macierzy nadawy całego układu  $\mathbf{F}_0$ . Poszczególne elementy macierzy blokowej  $\mathbf{M}$  opisują ewolucję składu ziarnowego w całym układzie. W macierzy tej zawsze występuje macierz jednostkowa  $\mathbf{I}$  i macierz zerowa  $\mathbf{0}$ , a w zależności od złożoności schematu układu pojawiają się w niej także macierz przejścia  $\mathbf{P}$  i macierz klasyfikacji  $\mathbf{C}$ , której elementy można wyznaczyć eksperymentalnie. Występujące w modelu elementy macierzy blokowej  $\mathbf{F}$  opisują wszystkie gęstości składu ziarnowego wchodzące do danego stopnia układu mieląco-klasyfikującego, zaś elementy macierzy blokowej  $\mathbf{F}_0$  ujmują gęstość składu ziarnowego nadawy ze źródeł zewnętrznych podawanej do wszystkich stopni układu. W pracy przedstawiono algorytm i trzy przykłady tworzenia macierzy blokowych dla wybranych schematów układu. Zaproponowany model może być wykorzystany w prognozowaniu uziarnienia produktu opuszczającego wybrany stopień układu oraz w modelowaniu procesów przeróbczych.

MATRIX MODEL FOR TRANSFORMATION OF PARTICLE SIZE DISTRIBUTION OF MATERIAL IN  
ARBITRARY MILLING-CLASSIFY SYSTEM

## Key words

Modeling, block matrix, transition matrix, classification matrix, particle size distribution, mill, classifier, complex circuit, milling-classify system

## Abstract

Complex circuit of milling-classify systems are used in different branches of industry, because the required particle size distribution of product can seldom be reached in a single-stage grinding on the same device. The multistage processes of comminution and classification make possible suitable selection of parameters process for variables grinding of fed material, mainly through sectioning of devices or change of their size and the types. Grinding material usually contains size fractions, which meet the requirements relating finished product. Then profitable is preliminary distributing material on a few size fractions, so to deal out with them demanded fraction of product, whereas remaining to direct alone or together with fed material to the same or different device. If the number of mills and classifiers in a circuit is large enough, building the model of particle size distribution transformation becomes rather complicated even for the circuit of a given structure. The situation becomes much more complicated, if we want to compare characteristics of all possible circuits, that can be constructed from these mills and classifiers, because the number of possible circuits increases greatly with the increase of number of devices being in the milling-classify system.

The method creating matrix model for transformation of particle size distribution in a circuit of arbitrary structure of milling-classify system is presented in the article. The proposed model contains the mass population balance of particle equation, in which are block matrices: the matrix of circuit  $\mathbf{M}$ , the matrix of inputs  $\mathbf{F}$  and the matrix of feed  $\mathbf{F}_0$ . The matrix  $\mathbf{M}$  contains blocks with the transition matrix  $\mathbf{P}$ , the classification matrix  $\mathbf{C}$ , the identity matrix  $\mathbf{I}$  and the zero matrix  $\mathbf{0}$  or elements describing the transformation of particle size distribution in the circuit. The matrix  $\mathbf{F}$  is the block column matrix, which elements describing all particle size distributions at inputs to the circuit elements. The matrix  $\mathbf{F}_0$  is the block column matrix, which elements describing particle size distributions in all feeds to the circuit. In paper was discussed this model in details, showed algorithm and three examples for matrix construction for the closed circuit of milling-classify systems. In conclusion was affirmed, that presented model makes possible to forecasting particle size distribution of grinding product, which leaving chosen the unit of system. The matrix model can be applied to improving modeling of mineral processing in the different grinding devices.