 DOI: 10.24425/academiaPAN.2021.137538

Limesy, kresy, brzegi, czyli granice w matematyce

Matematyka z jednej strony czerpie inspirację z codzienności, aspirując do jej modelowania w ramach precyzyjnego systemu logicznego, a z drugiej tę codzienność wzbogaca o nowe, często bardzo abstrakcyjne idee, poszerzające wyobraźnię i rozumienie otaczającej nas rzeczywistości. Dobrze może zilustrować tę myśl „śledztwo" dotyczące pojęć matematycznych związanych ze słowem „granica".

dr hab. inż. Agnieszka Jurlewicz, prof. PWr

Zajmuje się zastosowaniami matematyki, w szczególności tworzeniem modeli probabilistycznych takich zjawisk jak procesy relaksacyjne czy anomalne procesy dyfuzyjne. Związana z European Consortium for Mathematics in Industry (ECMI), była przewodniczącą Komitetu Edukacyjnego ECMI w latach 2014–2016.

agnieszka.jurlewicz@pwr.edu.pl

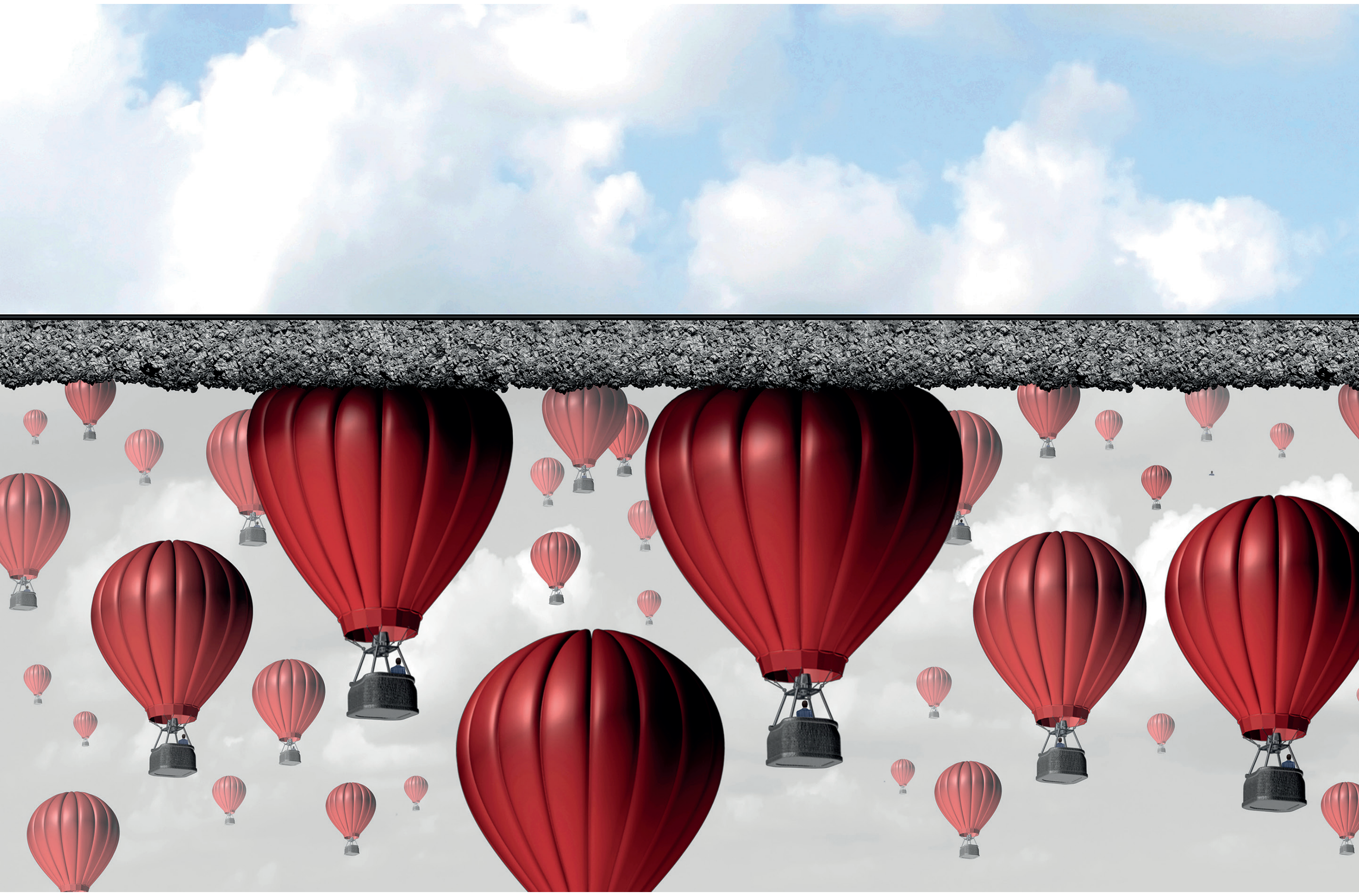
Agnieszka Jurlewicz

Katedra Matematyki Stosowanej
Wydział Matematyki, Politechnika Wrocławska

Przyjrzyjmy się na początek znaczeniom słowa „granica". Gdy mówimy, że część granicy Polski z Niemcami leży na rzece Odrze, mamy na myśli pewną linię, która zamyka lub oddziela pewien określony obszar, w tym przypadku państwo. W matematyce odnajdziemy bardzo podobne pojęcie: brzeg zbioru w przestrzeni metrycznej, czyli takiej, w której potrafimy w pewien sposób mierzyć odległość między elementami i w konsekwencji łatwo definiować kule otwarte (czyli zbiory elementów odległych od środka kuli o mniej niż pewna dodatnia stała zwana promieniem kuli). Kule o środku w pewnym punkcie definiują nam otoczenie tego punktu, a brzeg zbioru A to zbiór takich punktów, których otoczenia zawsze zawierają przynajmniej jeden element należący do A i jeden element spoza A. „Obywatelstwo" samego punktu brzegowego nie ma przy tym znaczenia: może on być elementem zbioru A lub nie.

Jeszcze inną granicę mamy na myśli w zdaniu: „Cierpliwość tej pielęgniarki do pacjentów nie ma granic". Odnosimy się tu raczej do nieograniczoności danej cechy zachowania, która także ma swój odpowiednik w matematyce. Powiemy, że dany zbiór (ponownie w przestrzeni metrycznej) jest ograniczony, gdy można go umieścić we wnętrzu pewnej kuli. Gdy nie jest to możliwe, zbiór jest jak cierpliwość naszej pielęgniarki – nieograniczony.

Wspomnijmy o jeszcze jednym kontekście używania słowa „granica". Czasem odnosi się ono do czegoś w rodzaju rekordów (sportowych, z Księgi rekordów Guinnessa czy tych zupełnie prywatnych). Na przykład w zdaniu: „Wydatek 1000 zł na torebkę jest obecnie w górnej granicy moich możliwości finansowych",



LIGHTSPRING/SHUTTERSTOCK.COM

mowa jest o pewnej maksymalnej kwocie, jaką możemy wydać na dany zakup. Znaczeniowo odpowiada temu matematyczne pojęcie ekstremum (maksimum lub minimum) funkcji na pewnym zbiorze, a w bardziej subtelnej wersji – kresów górnego i dolnego (inaczej infimum i supremum) funkcji na danym zbiorze, użytecznych szczególnie wtedy, gdy ekstrema nie są osiągane przez funkcję.

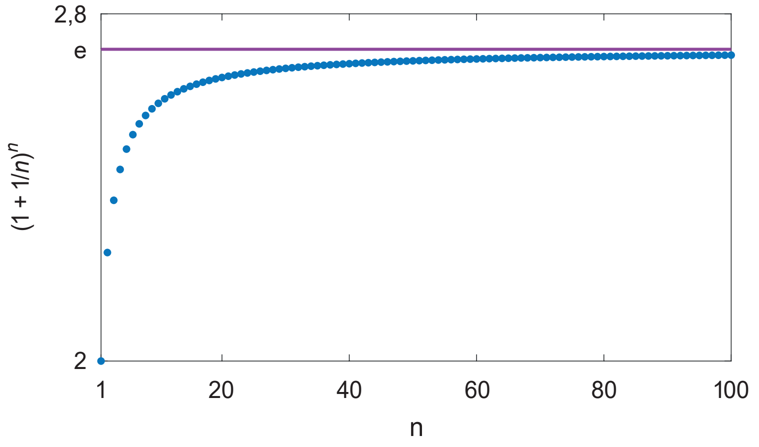
Granica jako pojęcie matematyczne

● Granica ciągu

Jedno ze znaczeń słowa „granica" w języku polskim odnosi się bezpośrednio do dość abstrakcyjnego pojęcia matematycznego. Podstawowa definicja określa granicę (łac. *limes*) ciągu liczbowego jako liczbę, do której ten ciąg dąży. Dokładniej mówiąc, ciąg liczb ponumerowanych liczbami naturalnymi (które możemy wyobrażać sobie jako numery kolejnych chwil na osi czasu) ma granicę równą, powiedzmy, *g*, gdy wybierając dowolnie bliskie otoczenie dla *g* znajdziemy w tym otoczeniu wszystkie przyszłe wyrazy ciągu od pewnej chwili czasu. (Dodajmy, że w świecie ciągów można czekać na tę właściwą chwilę dowolnie długo). Intuicyjnie ciąg, dla którego tak zdefiniowana granica istnieje, ma pewien konkretny cel i zmierza do niego w czasie. Przykładem może być ciąg odwrotności kolejnych liczb naturalnych: 1, $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, …, który dąży do granicy 0.

Inna jest sytuacja, gdy „apetyt" ciągu rośnie w miarę jedzenia, tzn. gdy niezależnie od tego, jak wysoki poziom ustawimy, wszystkie wyrazy ciągu od pewnej chwili czasu przekroczą ten poziom. Zachowuje się tak np. ciąg geometryczny o ilorazie 2 postaci 1, 2, 2^2, 2^3… Mówimy wtedy, że ciąg dąży do nieskończoności albo że ciąg ma granicę niewłaściwą równą nieskończoności. (Analogicznie definiujemy granicę niewłaściwą równą minus nieskończoności).

Wreszcie ciąg, który nie ma granicy (właściwej lub niewłaściwej), można przyrównać do osobnika skrajnie



Rys. 1
Zbieżność ciągu $(1 + 1/n)^n$ do liczby Eulera e

niezdecydowanego, który przez całe swoje, nieskończone w tym przypadku życie waha się co do wyboru celu. Prosto ilustruje to ciąg 1, −1, 1, −1, 1, −1, …, co chwilę zmieniający zdanie co do kierunku, jak w powiedzeniu: „I chciałabym, i boję się”.

Świat granic ciągów ma swoje prawa, takie jak twierdzenie o granicy sumy i iloczynu ciągów zbieżnych czy o trzech ciągach, które pozwalają badać zbieżność ciągu i wyznaczać granice łatwiej niż z bezpośrednim odwołaniem do definicji. Pojawiają się tu też pewne tajemnice w postaci tzw. wyrażeń nieoznaczonych, gdy reguł nie ma (np. mimo że dwa ciągi dążą do tej samej granicy równej 0, ich iloraz nie musi wcale dążyć do 1, a nawet dla dowolnie przez nas wybranej liczby można skonstruować przykłady takich ciągów, dla których granica ilorazu jest tej liczbie równa). Bywa też, że wiemy o istnieniu granicy, chociaż nie mamy dokładnej informacji o niej. Pomocne tu jest np. twierdzenie o ciągu monotonicznym i ograniczonym. Wynika z niego, że jeżeli kolejny wyraz ciągu jest zawsze większy od poprzedniego, a jednocześnie wszystkie wyrazy leżą poniżej poziomu pewnego „sufitu”, to ten ciąg na pewno jest zbieżny i jego granica leży gdzieś pod tym „sufitem” lub na nim. Nie znamy wprawdzie dokładnie lokalizacji granicy, ale w przybliżeniu wskazują ją wartości wyrazów ciągu o wysokich numerach. Poza tym, wiedząc, że granica ta istnieje, możemy badać wiele jej własności.

Jako ilustracja niech posłuży nam ciąg $(1 + 1/n)^n$, patrz rys. 1. Ciąg ten jest rosnący i ograniczony z góry, więc jest zbieżny, a jego granicę nazywamy liczbą Eulera e. Inaczej mówiąc, stała $e \approx 2{,}7182818284590452...$ (mocno związana z logarytmami i funkcją wykładniczą, a zatem i z wieloma zastosowaniami matematyki) jest zdefiniowana jako granica powyższego ciągu. Już od XVIII wieku wiadomo, że jest ona – podobnie jak liczba π – niewymierna i nie poznamy jej pełnego rozwinięcia dziesiętnego, lecz jedynie przybliżenia wymierne, które możemy uzyskać, m.in. wyliczając wartość $(1 + 1/n)^n$ dla pewnego konkretnego dużego n. Poprawność takiej metody obliczeń przybliżonych wynika wprost ze związku między ciągiem a jego granicą zakładanego w definicji, zgodnie z którym różnica między e a $(1 + 1/n)^n$ nie przekracza zadanej dokładności ε dla n dostatecznie dużych (przy czym doprecyzowanie owego „dostatecznie duży” zależy od wyboru wartości ε). Warto na marginesie zauważyć, że w przytoczonym przykładzie także mamy do czynienia z tajemnicą wyrażeń nieoznaczonych: chociaż podstawa $1 + 1/n$ dąży do 1, ciąg $(1 + 1/n)^n$ nie zbiega do 1, ale do $e \neq 1$. Powodem jest to, że wykładnik n zmierza do nieskończoności, a w takim przypadku zwykłe zasady arytmetyczne nie działają…

● Teoria szeregów

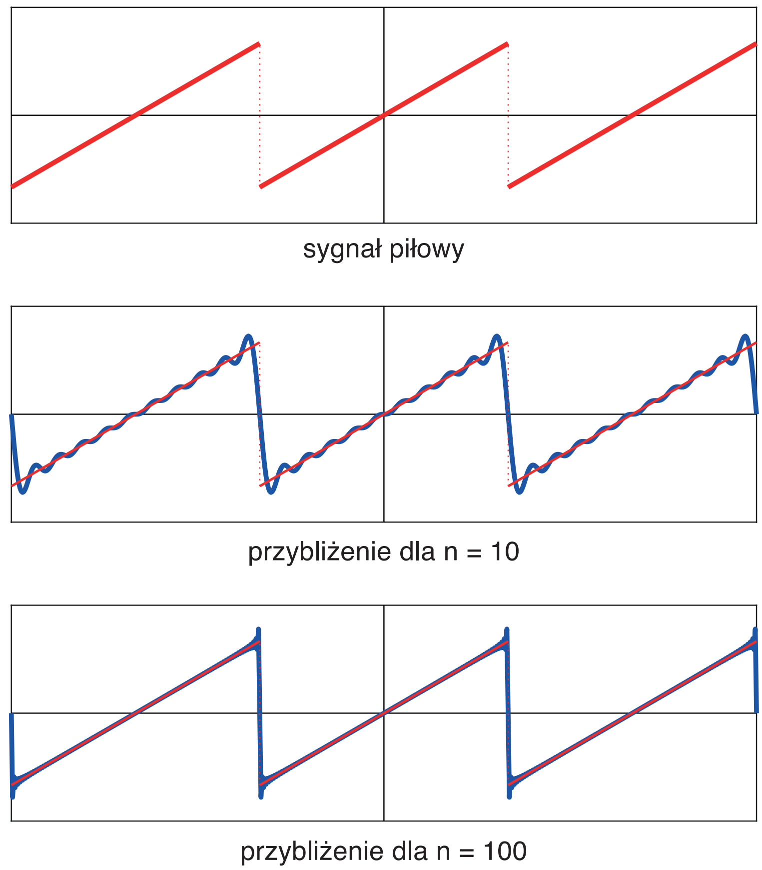
Definicja granicy ciągu i umiejętność badania, a potem posługiwania się granicą także w sytuacji, gdy jej wartości nie znamy, a nawet nie możemy poznać, jak w przykładzie z liczbą Eulera, pozwala nam wejść w teorię szeregów (czyli nieskończonych sum), najpierw szeregów liczbowych, a potem funkcyjnych, gdzie szczególną rolę odgrywają szeregi Taylora i Fouriera, dzięki którym wiele funkcji można przedstawić w postaci nieskończonych sum wielomianów lub prostych funkcji trygonometrycznych (patrz rys. 2). Takie przedstawienie z kolei jest kluczowe dla tworzenia wielu metod numerycznych stosowanych w obliczeniach przybliżonych. I kto ze zwykłych użytkowników kalkulatora by pomyślał, że gdzieś głęboko u podstaw jego działania znajduje się pojęcie granicy ciągu!

● Granica funkcji a pochodne i całki

Koncepcję granicy ciągu liczbowego rozszerza się jeszcze w innym kierunku. Zamiast ograniczać się do ciągów, możemy rozważyć ogólny przypadek funkcji i badać zachowania wartości tej funkcji, gdy argumenty dążą do pewnego wybranego celu. Oczywiście wymaga doprecyzowania nie tylko to, co mamy na myśli, mówiąc, że argumenty zmierzają do celu, lecz także sposób mierzenia/oceniania tzw. asymptotycznego zachowania wartości funkcji $f(x)$. Ogólna idea daje się stosunkowo prosto sformułować, gdy i argumenty, i wartości funkcji pochodzą z przestrzeni metrycznych. Wtedy powiemy, że funkcja $f(x)$ ma granicę g (albo że wartości funkcji $f(x)$ dążą do g) przy x dążącym do a, gdy wybierając w zbiorze wartości funkcji kulę K_g o środku g i dowolnie małym promieniu znajdziemy w dziedzinie funkcji taką kulę K_a o środku a, że wszystkie wartości funkcji dla argumentów z K_a wpadają w kulę K_g. Inaczej mówiąc, g jest granicą funkcji $f(x)$ przy x dążącym do a, jeśli wartości funkcji są w bliskim (tzn. o małym promieniu) otoczeniu g dla argumentów z odpowiednio bliskiego otoczeniu a. (Gwoli ścisłości: pomijam tu wszystkie detale dotyczące charakteru elementu a, który oczywiście musi być w pewien sposób związany z dziedziną funkcji, chociaż wcale nie musi do niej należeć).

Takie ujęcie idei granicy funkcji jest oczywiście bardzo ogólne i można je uszczegółowić na różne sposoby, a także rozszerzać. Na przykład gdy rozważamy podstawowy przypadek funkcji, których argumenty i wartości to liczby rzeczywiste, możemy dość łatwo dodać definicję granicy funkcji (określonej oczywiście na pewnej półprostej) przy argumentach dążących do nieskończoności (przez analogię do definicji granicy ciągu) lub do minus nieskończoności, a także granice jednostronne, w których w definicji bierzemy pod uwagę otoczenie punktu tylko z jednej jego strony (co w przypadku argumentów z prostej rzeczywistej ma jasny sens). Ponadto możemy – tak jak dla ciągów – dopuścić granice niewłaściwe.

Nie koniec na tym. Uzbrojeni w takie narzędzie stosujemy je dla pewnych szczególnych odwzorowań, wprowadzając w ten sposób kolejne – kluczowe i dla teorii, i dla aplikacji matematyki – pojęcia, jak ciągłość i różniczkowalność funkcji, bez których trudno wyobrazić sobie klasyczną fizykę i podstawowy model świata, który nas otacza. Jako granice pewnych nieco bardziej skomplikowanych obiektów definiujemy także całki różnych typów, począwszy od całki Riemanna, równie ważne z punktu widzenia zastosowań matematyki w naukach podstawowych i inżynierskich.



Rys. 2
Zbieżność szeregu Fouriera sygnału piłowego do tego sygnału (n to liczba wykorzystanych składników szeregu dla uzyskania przybliżenia sygnału)

● Krzywa Gaussa i metody Monte Carlo

Ale nie tylko rachunek różniczkowy i całkowy bazuje na matematycznym pojęciu granicy. Można je spotkać – mniej lub bardziej jawnie – w niemal każdym dziale królowej nauk. Mnie osobiście bardzo bliska jest tematyka praw wielkich liczb i twierdzeń granicznych w rachunku prawdopodobieństwa, gdzie są badane granice z prawdopodobieństwem 1 i granice według rozkładu pewnych ciągów zmiennych losowych, w podstawowej wersji sum częściowych ciągów niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie. Okazuje się, że przy bardzo ogólnych założeniach o rozkładzie składników (inaczej mówiąc, o charakterze ich losowości) sumy po odpowiednim unormowaniu zachowują się w granicy w pewnym sensie uniwersalnie, gdy liczba składników rośnie do nieskończoności.

Na przykład wystarczy, że istnieje wartość oczekiwana rozkładu składnika, by sumy podzielone przez liczbę składników (tzn. średnie arytmetyczne) traciły losowość i zbiegały z prawdopodobieństwem 1 do stałej równej tej wartości oczekiwanej (o czym mówi mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa). Twierdzenie to stanowi podstawę pewnej ważnej grupy metod numerycznych, w których przybliżone wartości wielkości deterministycznych uzyskujemy przez pewne losowanie. Pomysł ten, wprowadzony przez polskiego matematyka Stanisława Ulama do obliczeń przy pracach nad bombą atomową w Los Alamos i wówczas nazwany metodą Monte Carlo, był w szczególnych przypadkach stosowany już wcześniej. Znanym przykładem jest XVIII-wieczny problem znany pod nazwą „igła Buffona", w którym wielokrotnie losowo upuszczając igłę na planszę z zaznaczonymi równoległymi i równo oddalonymi od siebie liniami (przy czym igła jest krótsza niż przerwa między prostymi), zliczamy, jak często igła przecięła którąś z linii. Na podstawie m.in. prawa wielkich liczb można pokazać, że otrzymana częstość wraz z informacją o długości igły i o odległości między prostymi pozwala dobrze oszacować wartość liczby π.

Gdy rozkład składników sumy ma skończoną niezerową wariancję, sumy przesunięte o średnią i podzielone przez odchylenie standardowe – mają asymptotycznie ten sam standardowy rozkład normalny (inaczej gaussowski) niezależnie od tego, jaki dokładnie jest rozkład składników. Fakt ten jest znany jako centralne twierdzenie graniczne Lindeberga-Lévy'ego i dostarcza wyjaśnienia popularności krzywej Gaussa (dzwonowej) w statystycznej analizie danych, używanej powszechnie m.in. w finansach, medycynie, psychologii czy naukach społecznych.

Mam nadzieję, że te kilka przykładów wykorzystania matematycznego pojęcia granicy dobrze ukazuje, jak ważne jest to pojęcie, jak kluczową rolę odgrywa i w jakim stopniu wszyscy z niego – zazwyczaj nieświadomie – korzystamy. ■