

IDENTYFKACJA ROZKŁADU PRAWDOPODOBIENSTWA
REPREZENTUJĄCEGO WYNIKI POMIARÓW STĘŻEŃ
ZANIECZYSZCZEŃ WÓD POWIERZCHNIOWYCH

JANINA MOŻEJKO

Politechnika Szczecińska, Instytut Chemii i Podstaw Ochrony Środowiska, Al. Piastów 42, 71-065, Szczecin

Keywords: environmental modelling, probability distribution, surface waters monitoring, water quality.

IDENTIFICATION OF PROBABILITY DISTRIBUTION REPRESENTING
OF SURFACE WATERS POLLUTION MEASUREMENTS

This paper presents the statistical modelling of the monitoring data on oxygen indicators in the Rega River, collected in years of 1992–97. In the first part, the six probability distributions are examined to fit the experimental data. The results indicate that the lognormal and Gamma distributions give an adequate description for all considered data series, as measured by P-P probability plots, and a Kolmogorov-Smirnov goodness of fit test. In the second part, the detailed statistical analysis was performed based on lognormal distribution. This study showed that the approximation of monitoring data with the appropriate probability distribution could be very useful for evaluating of water quality.

Streszczenie

Przedstawiono wyniki modelowania statystycznego pomiarów wskaźników tlenowych wykonanych w punkcie monitoringu reperowego na rzece Redze w latach 1992–97. W części pierwszej badano przydatność do opisu danych doświadczalnych sześciu teoretycznych rozkładów prawdopodobieństwa. Wyboru rozkładu dokonano na podstawie analizy wykresów P-P (prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo) oraz wyników testu Kołmogorowa–Smirnowa. Stwierdzono, że zarówno rozkład logarytmiczno-normalny, jak i rozkład Gamma dają adekwatny opis danych doświadczalnych dla wszystkich analizowanych serii pomiarowych. W części drugiej przeprowadzono szczegółową analizę statystyczną wyników pomiarów na bazie rozkładu logarytmiczno-normalnego. Wyniki tej pracy wykazały, że aproksymacja pomiarów wykonywanych w ramach sieci monitoringu odpowiednim rozkładem prawdopodobieństwa może być użytecznym narzędziem do oceny jakości wód.

WSTĘP

Od 1992 r. powierzchniowe wody płynące objęte są programem Państwowego Monitoringu Środowiska, którego istotą jest między innymi wykonywanie systematycznych, standardowych pomiarów i obserwacji jakości i ilości wód sieci hydrologicznej na obszarze całego kraju. Monitoring wód powierzchniowych jest zatem ważnym narzędziem wspomagającym w zarządzaniu zasobami wodnymi i ich ochroną

poprzez dostarczenie informacji o skuteczności i efektywności realizowanych programów ochrony środowiska.

Monitoring Powierzchniowych Wód Płynących obejmuje [7]:

1. Sieć krajową (ogólnopolską)
 - przekrój reperowy,
 - przekrój podstawowy,
 - przekrój graniczny.
2. Sieci regionalne.
3. Sieci lokalne stacji i stanowisk pomiarowych.
4. Osłonowe stacje ujęć wody.

W poszczególnych przekrojach pomiarowo-kontrolnych badania jakości wód wykonują Wojewódzkie Inspektoraty Ochrony Środowiska. Pomiarów wykonywane są w określonych odstępach czasu, w ustalonym zakresie wskaźników fizykochemicznych i biologicznych.

W chwili obecnej istnieją już ogromne bazy danych wyników pomiarów zanieczyszczeń wód powierzchniowych. Dane te są źródłem informacji o stanie zanieczyszczenia głównych rzek Polski, a jednocześnie stanowią bezcenny materiał doświadczalny, którego analiza pozwala na tworzenie wiedzy o procesach zachodzących w wodach i podejmowanie lepszych decyzji. Mogą być one między innymi wykorzystane do projektowania i weryfikacji modeli rozprzestrzeniania się zanieczyszczeń w wodach powierzchniowych.

Jakość wody w rzekach jest uwarunkowana zmiennością różnych czynników losowych, takich jak: warunki meteorologiczne, szybkość przepływu rzek, zmienna emisja zanieczyszczeń, stopień biodegradacji i wiele innych [2]. Podstawowym modelem danych obarczonych dużą zmiennością losową jest odpowiedni rozkład prawdopodobieństwa najlepiej przybliżający wyniki doświadczalne [4, 5].

Celem pracy jest identyfikacja postaci funkcji rozkładu prawdopodobieństwa dla wyników pomiarów wskaźników tlenowych (rozpuszczony tlen – O_2 , biochemiczne zapotrzebowanie tlenu – BZT_5 , chemiczne zapotrzebowanie tlenu nadmanganianowe – $ChZT-Mn$, chemiczne zapotrzebowanie tlenu dwuchromianowe – $ChZT-Cr$) reprezentującej zbiór danych rocznych. Bazę danych stanowiły wyniki pomiarów tych wskaźników w punkcie reperowym na Redze w Trzebiatowie z lat 1992–97, prowadzonych przez WIOŚ w Szczecinie. Analizowano serie roczne o liczebności równej 52. Do obliczeń wykorzystano programy STISTICA PL i Excel.

IDENTYFIKACJA FUNKCJI ROZKŁADU PRAWDOPODOBIENSTWA

Podczas identyfikacji funkcji rozkładu prawdopodobieństwa, który najlepiej opisuje dane doświadczalne, wzięto pod uwagę sześć modeli rozkładu [9]. Ich charakterystykę zamieszczono w tabeli 1.

Proces identyfikacji postaci funkcji rozkładu prawdopodobieństwa najlepiej odwzorowującej badany ciąg pomiarów wykonany był etapowo. W pierwszym etapie posłużono się technikami graficznymi w celu odrzucenia rozkładów ewidentnie niezgodnych.

Tabela 1. Badane rozkłady prawdopodobieństwa
Investigated probability distributions

Lp. No	Rozkład Distribution	Funkcja rozkładu Distribution function	Parametry Parameters
1	normalny normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$ $-\infty < x < \infty$	μ – wartość oczekiwana expected value σ – odchylenie standardowe standard deviation
2	logarytmiczno-normalny log-normal	$f(x) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2\right]$ $x > 0$	μ – wartość oczekiwana $\ln x$ expected value of $\ln x$ σ – odchylenie standardowe $\ln x$ standard deviation of $\ln x$
3	wykładniczy exponential	$f(x) = \beta e^{-\beta x}$, $x > 0, \beta > 0$	β – parametr skali scale parameter
4	gamma	$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ $x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$	α – parametr kształtu shape parameter β – parametr skali scale parameter
5	Weibulla-dwuparametrowy two-parameter Weibull	$f(x) = \alpha \cdot \beta^{-\alpha} \cdot e^{-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha}$ $x > 0, \alpha > 0, \beta > 0$	α – parametr kształtu shape parameter β – parametr skali scale parameter
6	wartości ekstremalnych extreme value	$f(x) = \left(\frac{1}{b}\right) \cdot \exp(-1/b) \cdot (x-a) - e^{-(1/b)(x-a)}, -\infty < x < \infty, b > 0$	a – parametr położenia location parameter b – parametr skali scale parameter

Wykorzystano w tym celu wykresy typu prawdopodobieństwo-prawdopodobieństwo (P-P), na których porównywano dystrybuantę empiryczną z dystrybuantą teoretyczną, o parametrach szacowanych na podstawie danych [6, 10]. Jeżeli wszystkie punkty na wykresie pokrywały się z prostą będącą jego przekątną, wówczas wnioskowano, że rozkład teoretyczny był dobrym przybliżeniem dla rozkładu empirycznego. Na rysunkach 1–2 pokazano przykładowe porównania dystrybuanty empirycznej wyników pomiarów chemicznego zapotrzebowania tlenu metodą dwuchromianową z 1997 roku z dystrybuantą rozkładu Gamma oraz rozkładu wykładniczego.

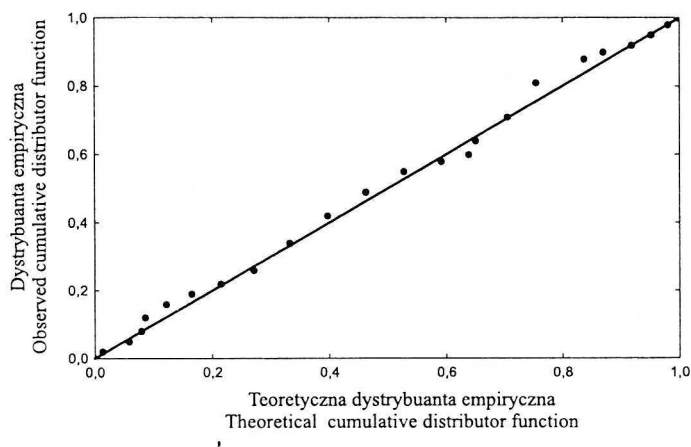
Analiza tego typu wykresów dla wszystkich serii pomiarowych wykazała, że rozkładem ewidentnie niezgodnym z danymi doświadczalnymi był rozkład wykładniczy. Dlatego też rozkład ten wyłączono z dalszych badań.

W drugim etapie, jako kryterium wyboru rozkładu, przyjęto statystykę D typu Kołmogorowa–Smirnowa zdefiniowaną następująco [3, 4]:

$$D = \max_x |F_e(x) - F(x)|,$$

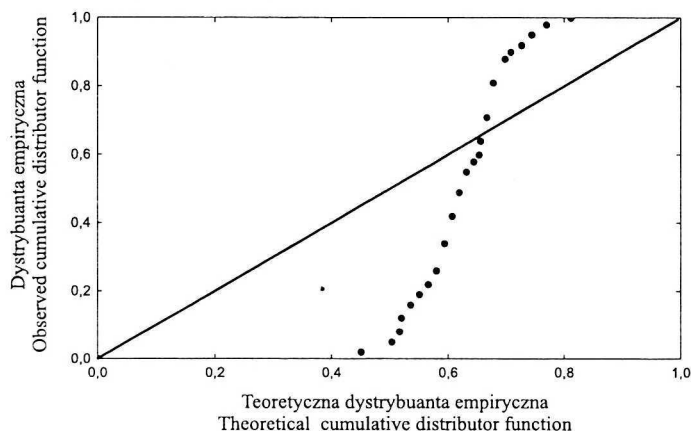
gdzie $F_e(x)$ jest dystrybuantą empiryczną, a $F(x)$ jest dystrybuantą dopasowywanego rozkładu teoretycznego. Stopień zgodności rozkładu empirycznego z określonej klasy rozkładem teoretycznym testowano na poziomie istotności $\alpha = 0,05$. Ocenie podlegała

także wielkość statystyki D. Im mniejsza jest wartość D, tym lepsze jest dopasowanie badanego rozkładu.



Rys. 1. Porównanie dystrybuanty empirycznej z dystrybuantą rozkładu Gamma dla wyników pomiarów ChZT-Cr z roku 1997

Comparison of observed cumulative distribution function with the Gamma cumulative distribution function for COD-Cr measurements in 1997



Rys. 2. Porównanie dystrybuanty empirycznej z dystrybuantą rozkładu wykładniczego dla wyników pomiarów ChZT-Cr z roku 1997

Comparison of the observed cumulative distribution function with the exponential cumulative distribution function for COD-Cr measurements in 1997

W tabeli 2 zestawiono wartości statystyki D dla poszczególnych serii pomiarowych wraz z podsumowaniem analizy. Wyniki potwierdziły dużą zgodność danych empirycznych z rozkładem Gamma, logarytmiczno-normalnym oraz Weibulla. Ten ostatni wykazał jednak nieco gorsze dopasowanie. Największe wartości statystyki D, a więc najgorsze dopasowanie uzyskano dla rozkładu wartości ekstremalnych.

Tabela 2. Wartości statystyki D Kolmogorowa–Smirnowa dla badanych rozkładów
 Values of Kolmogorow–Smirnow D statistics for examined distributions

Wskaźnik Indicator	Rok Year	Rozkład – Distribution				
		normalny normal	log.-norm. log-normal	gamma	Weibulla Weibull	wart.ekstrem. extr.values
O ₂	1992	0,0583	0,0805	0,0698	0,0793	0,1137
	1993	0,1267	0,1099	0,1188	0,1281	0,1633
	1994	0,0656	0,0835	0,0795	0,0954	0,1319
	1995	0,1226	0,1455	0,1381	0,0916	0,1109
	1996	0,0980	0,1257	0,1173	0,0699	0,0897
	1997	0,1254	0,1599	0,1474	0,0932	0,1156
BZT ₅ BOD ₅	1992	0,1363	0,0984	0,0967	0,1142	0,1951
	1993	0,2044	0,1210	0,1488	0,1755	0,2735
	1994	0,1346	0,0819	0,1028	0,1211	0,2014
	1995	0,1442	0,0777	0,0886	0,1160	0,2144
	1996	0,1538	0,0674	0,0980	0,1258	0,2231
	1997	0,2203	0,1317	0,1613	0,1896	0,2883
ChZT-Mn COD-Mn	1992	0,0843	0,0846	0,0811	0,0712	0,1252
	1993	0,1229	0,0908	0,1044	0,1143	0,1776
	1994	0,1311	0,1262	0,1270	0,1408	0,1925
	1995	0,0853	0,1088	0,1007	0,0856	0,1298
	1996	0,2114	0,1482	0,1659	0,2162	0,2587
	1997	0,1231	0,0823	0,0975	0,1322	0,1920
ChZT-Cr COD-Cr	1992	0,0929	0,0853	0,0775	0,0935	0,1610
	1993	0,1118	0,0914	0,0947	0,1234	0,1790
	1994	0,0815	0,0770	0,0830	0,0952	0,1389
	1995	0,0730	0,0847	0,0736	0,0719	0,1268
	1996	0,1176	0,0885	0,0900	0,1374	0,1539
	1997	0,1238	0,1002	0,1054	0,1524	0,1516
maksimum – maximum		0,2203	0,1599	0,1659	0,2162	0,2883
średnia – mean		0,1229	0,1021	0,1070	0,1181	0,1712
ilość serii niezgodnych z odpowiednim rozkładem number of series not com- patible with respective distributions		3	0	0	1	7
ilość serii z D>0,15 number of series with D>0,15		4	1	2	4	15
ilość serii z D<0,1 number of series with D<0,1		8	14	12	10	1

Ze względu na to, że model ma zapewniać wiarygodną ocenę koncentracji zanieczyszczeń poprzez oszacowanie odpowiednich percentyli funkcji rozkładu prawdopo-

dobieństwa reprezentujących wartości dopuszczalne np. stężenie maksymalne (percentyl 90 lub 95), stężenie minimalne (percentyl 5 lub 10), wybór funkcji rozkładu może wpływać na sposób oceny danych. Istotna jest tutaj przede wszystkim zgodność dystrybuanty empirycznej i teoretycznej w okolicach danych ekstremalnych, czyli tzw. „ogonów rozkładu”. Do porównywania rozkładów w tym przypadku można wykorzystać statystykę Andersona-Darlinga (AD) [12]:

$$AD = \max_x \frac{|F_e(x) - F(x)|}{\sqrt{F(x)(1-F(x))}}.$$

Zauważmy, że AD jest tak ważoną statystyką D, aby dla skrajnych wartości x przyjmowała największe wartości. Mniejsza wartość statystyki AD oznacza lepsze dopasowanie rozkładu do danych.

Wartości statystyki Andersona-Darlinga wyznaczone dla rozkładów logarytmiczno-normalnego, Gamma i Weibulla zestawiono w tabeli 3. Wynika z niej, że najmniejsze wartości statystyki AD, a więc najlepsze zdolności aproksymacyjne, miały rozkłady logarytmiczno-normalny oraz Gamma, przy czym nie można jednoznacznie określić, który z tych dwóch rozkładów jest najlepszy. Przyjęto zatem, że modelowanie wyników empirycznych rozkładem logarytmiczno-normalnym i rozkładem Gamma będzie porównywalnie dobre. Stwierdzono także, że dla wszystkich analizowanych serii danych można przyjąć tę samą postać funkcji rozkładu, zmianie ulegają jedynie jej parametry. Uzyskane rezultaty są zgodne z wynikami wcześniejszych prac [1, 11].

WYNIKI ANALIZY STATYSTYCZNEJ

W tabeli 4 zebrano przykładowo, wyznaczone na podstawie danych eksperymentalnych dla wszystkich analizowanych wskaźników, parametry rozkładu logarytmiczno-normalnego μ i σ . Na ich podstawie obliczono wartość oczekiwaną $E(x)$ i odchylenie standardowe $D(x)$ rozkładu logarytmiczno-normalnego, wykorzystując ich związki z parametrami μ i σ :

$$E(x) = \exp\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)$$

$$D(x) = E(x) \cdot \sqrt{\left(e^{\sigma^2} - 1\right)}.$$

W celu porównania rozrzutu w pomiarach poszczególnych wskaźników zanieczyszczeń wyznaczono współczynnik zmienności V :

$$V = \frac{D(x)}{E(x)} \cdot 100 [\%].$$

Tabela 3. Wartości statystyki AD dla wybranych rozkładów prawdopodobieństwa
 Values of AD statistics for selected probability distributions

Wskaźnik Indicator	Rok Year	Rozkład - Distribution					
		gamma		logarytmiczno-norm. log-normal		Weibulla Weibull	
		maksymalna maximum	średnia mean	maksymalna maximum	średnia mean	maksymalna maximum	średnia mean
O ₂	1992	0,1871	0,0537	0,1903	0,0563	0,2668	0,0965
	1993	0,2517	0,0919	0,2300	0,0959	0,3182	0,0914
	1994	0,2081	0,0475	0,2771	0,0475	0,2422	0,0812
	1995	0,2616	0,1121	0,2794	0,1130	0,2432	0,0934
	1996	0,2274	0,0838	0,2559	0,0938	0,1401	0,0566
	1997	0,2217	0,1258	0,2430	0,1336	0,1865	0,0784
BZT ₅ BOD ₅	1992	0,1901	0,0719	0,2911	0,0812	0,4077	0,1039
	1993	0,2492	0,1006	0,2028	0,0945	0,8275	0,1505
	1994	0,1745	0,0855	0,1641	0,0695	0,9295	0,1620
	1995	0,1955	0,0698	0,1905	0,0629	0,4112	0,1255
	1996	0,1764	0,0703	0,1618	0,0564	0,2538	0,1178
	1997	0,3086	0,1054	0,2519	0,0768	2,0876	0,1887
ChZT-Mn COD-Mn	1992	0,1549	0,0666	0,1596	0,0688	0,4972	0,0929
	1993	0,1827	0,0623	0,1509	0,0583	0,2822	0,1180
	1994	0,2433	0,1310	0,2418	0,1288	0,2935	0,1290
	1995	0,1765	0,0898	0,2035	0,0918	0,1482	0,0740
	1996	0,3618	0,0984	0,3291	0,0923	1,4315	0,1885
	1997	0,1949	0,0520	0,1741	0,0508	0,3056	0,1247
ChZT-Cr COD-Cr	1992	0,1783	0,0504	0,2004	0,0586	0,2090	0,0742
	1993	0,1730	0,0739	0,2244	0,0655	0,2265	0,1063
	1994	0,1345	0,0450	0,1338	0,0499	0,2556	0,1070
	1995	0,1525	0,0560	0,1667	0,0586	0,2700	0,0820
	1996	0,1991	0,0659	0,1765	0,0574	2,2096	0,1667
	1997	0,1273	0,0525	0,1361	0,0517	0,3642	0,1127
wartość maksymalna maximum value		0,3618	0,1310	0,3291	0,1336	2,2096	0,1887
średnia - mean		0,2054	0,0776	0,2098	0,0756	0,5336	0,1134

Zmiany tego współczynnika w badanym okresie czasu pokazano na rysunku 3. Wynika z niego, że największą zmiennością cechują się pomiary BZT₅, a najmniejszą pomiary rozpuszczonego tlenu.

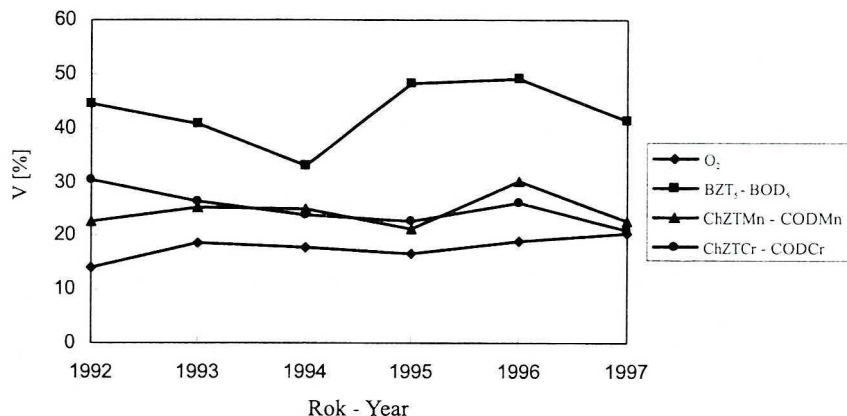
Znajomość postaci rozkładu, jaki przyjmują roczne obserwacje stężeń zanieczyszczeń wód Regi oraz jego parametrów, pozwoliła na oszacowanie wartości charakterystycznych percentyli rozkładu, takich jak percentyl 95 (maksymalne gwarantowane stężenie z prawdopodobieństwem 95% – dla BZT₅, ChZT-Mn i ChZT-Cr) oraz percentyl 5 (minimalne gwarantowane stężenie – dla O₂). Wyznaczono także wartości dominanty oraz prawdopodobieństwa przekroczenia wartości dopuszczalnych dla I klasy

czystości wód [8]. Parametry te zamieszczono w tabeli 4. Wynika z niej, że minimalne stężenie tlenu w wodach rzeki Regi wynosiło w badanym okresie 7,2–7,8 mgO₂/dm³. Maksymalne wartości dla pozostałych wskaźników wynosiły odpowiednio: BZT₅ – 6–8,4 mgO₂/dm³, ChZT-Mn – 11,8–16,3 mgO₂/dm³, ChZT-Cr – 38,3–46,7 mgO₂/dm³.

Tabela 4. Parametry rozkładu logarymiczno-normalnego dla wskaźników tlenowych
Lognormal distribution parameters for oxygen indicators

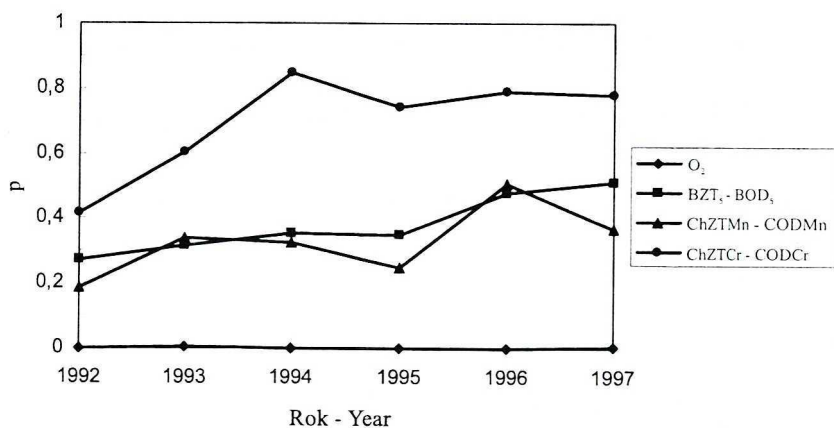
Wskaźnik Indicator	Rok Year	Parametry – Parameters							
		μ mg/dm ³	σ mg/dm ³	E(x) mg/dm ³	D(x) mg/dm ³	Do mg/dm ³	V %	C ₉₅ mg/dm ³	p
O ₂	1992	2,28	0,14	9,9	1,4	9,6	14,1	7,8	0,0002
	1993	2,26	0,19	9,8	1,8	9,3	18,7	7,1	0,0057
	1994	2,32	0,18	10,3	1,8	9,8	17,8	7,6	0,0014
	1995	2,31	0,17	10,2	1,7	9,8	16,6	7,7	0,0009
	1996	2,33	0,19	10,5	2,0	9,9	19,0	7,5	0,0022
	1997	2,31	0,20	10,3	2,1	9,7	20,5	7,2	0,0052
BZT ₅ BOD ₅	1992	1,13	0,42	3,4	1,5	2,6	44,5	6,2	0,2709
	1993	1,20	0,39	3,6	1,5	2,9	40,7	6,3	0,3164
	1994	1,27	0,32	3,7	1,2	3,2	33,1	6,0	0,3549
	1995	1,21	0,46	3,7	1,8	2,7	48,3	7,1	0,3496
	1996	1,36	0,46	4,4	2,1	3,2	49,0	8,4	0,4792
	1997	1,40	0,40	4,4	1,8	3,5	41,2	7,8	0,5101
ChZT-Mn COD-Mn	1992	2,10	0,22	8,4	1,9	7,8	22,7	11,8	0,1859
	1993	2,20	0,25	9,3	2,4	8,5	25,3	13,6	0,3391
	1994	2,19	0,25	9,2	2,3	8,4	25,0	13,4	0,3248
	1995	2,16	0,21	8,9	1,9	8,3	21,2	12,3	0,2505
	1996	2,31	0,29	10,5	3,2	9,2	30,1	16,3	0,5063
	1997	2,23	0,22	9,5	2,2	8,8	22,7	13,4	0,3663
ChZT-Cr COD-Cr	1992	3,16	0,30	24,5	7,5	21,5	30,5	38,3	0,4154
	1993	3,29	0,26	27,7	7,3	25,0	26,4	41,0	0,6024
	1994	3,46	0,23	32,6	7,8	30,0	23,8	46,7	0,8456
	1995	3,36	0,22	29,6	6,7	27,5	22,6	41,7	0,7426
	1996	3,43	0,26	31,8	8,3	28,8	26,2	47,0	0,7894
	1997	3,38	0,21	30,0	6,3	28,2	21,0	41,3	0,7803

Prawdopodobieństwa przekroczenia wartości dopuszczalnych badanych wskaźników dla I klasy czystości wód pokazano na rysunku 4. Jak widać z wykresu, jedynie w przypadku rozpuszczonego tlenu, prawdopodobieństwo wystąpienia stężeń niższych niż dopuszczalne można uznać za zerowe. Dla pozostałych wskaźników prawdopodobieństwa przekroczenia wartości dopuszczalnych są już znaczne; najwyższe dla ChZT-Cr. Ponadto, prawdopodobieństwa te w kolejnych latach mają tendencję rosnącą, co świadczy o pogarszającej się jakości wód Regi.



Rys. 3. Porównanie współczynnika zmienności poszczególnych wskaźników tlenowych w latach 1992–97

Comparison of coefficient of variation for particular oxygen indicators in years 1992–97



Rys. 4. Prawdopodobieństwo przekroczenia wartości dopuszczalnych wskaźników tlenowych dla I klasy czystości wód

The probability of exceeding of standards values of oxygen indicators for the first class of water purity class

WNIOSKI

Stwierdzono, że roczne serie wyników pomiarów wskaźników zanieczyszczeń wód rzeki Regi (rozpuszczony tlen – O₂, biochemiczne zapotrzebowanie tlenu – BZT₅, chemiczne zapotrzebowanie tlenu nadmanganianowe – ChZT-Mn, chemiczne zapotrzebowanie tlenu dwuchromianowe – ChZT-Cr) mogą być z dobrym przybliżeniem aproksymowane zarówno rozkładem logarymiczno-normalnym jak i rozkładem Gamma.

Znajomość postaci funkcji rozkładu umożliwiła wyznaczenie w sposób jednoznaczny różnych parametrów charakteryzujących dany zbiór pomiarów takich jak: współczynnik zmienności, dominanta stężeń, stężenia gwarantowane, prawdopodobieństwa przekroczeń wartości dopuszczalnych.

Uzyskane rezultaty wykazały, że modelowanie wyników pomiarów prowadzonych w ramach monitoringu wód powierzchniowych rozkładami teoretycznymi, może być użytecznym narzędziem do oceny jakości wód.

LITERATURA

- [1] Binięda M.: *Modelowanie wyników pomiarów stężeń zanieczyszczeń wód powierzchniowych w systemie monitoringu reperowego*, praca magisterska, Politechnika Szczecińska, Szczecin 2000.
- [2] Dojlido J. R.: *Chemia wód powierzchniowych*, Wydawnictwo Ekonomia i Środowisko, Białystok 1995.
- [3] Domański Cz., K. Pruska: *Nieklasyczne metody statystyczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2000.
- [4] Gajek L., M. Kałuska: *Wnioskowanie statystyczne: modele i metody*, WNT, Warszawa 1996.
- [5] Hellwig Z.: *Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1998.
- [6] Luszniewicz A., T. Słaby: *Statystyka z pakietem komputerowym STATISTICA PL*, Wydawnictwo C.H. BECK, Warszawa 2001.
- [7] Praca zbiorowa PIOŚ: *Wskazówki metodyczne do projektowania regionalnego monitoringu wód powierzchniowych płynących*, Warszawa 1994.
- [8] Rozporządzenie Ministra Ochrony Środowiska, Zasobów Naturalnych i Leśnictwa z dnia 5 listopada 1991 roku w sprawie klasyfikacji wód oraz warunków, jakim powinny odpowiadać ścieki wprowadzone do wód lub do ziemi, Dz.U. Nr 116, Poz. 503.
- [9] Sobczyk K., B. F. Spencer Jr: *Stochastyczne modele zmęczenia materiałów*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1996.
- [10] Stanisław A.: *Przystępny kurs statystyki w oparciu o program STATISTICA PL, cz. I*, Statsoft Polska Sp. z o.o., Kraków 1998.
- [11] Straszko J., M. Jastrzębska: *Statystyczna ocena pomiarów skażenia wód powierzchniowych*, Archives of Environmental Protection, **26**, 151–161 (2000).
- [12] Weron A., R. Weron: *Inżynieria finansowa*, Wydawnictwo Naukowo-Techniczne, Warszawa 1999.