

JERZY MARTYNIAK*

Warunek zmniejszenia ryzyka błędu oszacowania właściwości kopaliny decydujących o jej zakwalifikowaniu do konkretnej kategorii jakościowej

Słowa kluczowe

Gospodarka surowcami mineralnymi, błąd szacowania, ryzyko decyzji, reprezentatywność próbek

Streszczenie

Przedstawiono wpływ dokładności oszacowania jakości kopaliny na ryzyko wystąpienia straty finansowej, spowodowanej decyzją podjętą na podstawie oceny tej jakości, opartej na reprezentujących ją wynikach badań. Zwrócono uwagę na rolę prawdopodobieństwa znajdowania się rzeczywistych parametrów jakościowych kopaliny poza granicami dopuszczalnych tolerancji estymacyjnych dla wyników oznaczeń. Prawdopodobieństwo to jest zasadniczym czynnikiem wspomnianego ryzyka. Jest ono bezpośrednio określone przez prawdopodobieństwo występowania rzeczywistych parametrów kopaliny w obszarach, które odpowiadają ustalonym tolerancjom estymacyjnym. To ostatnie prawdopodobieństwo nazywa się poziomem ufności i razem z przyjętymi tolerancjami przedstawia statystyczne kryterium dokładności oszacowania (statystycznego przybliżenia) wielowymiarowej jakościowej charakterystyki kopaliny. Scharakteryzowano niepewność powstającą przy stosowaniu tradycyjnej metody w celu estymacji wielowymiarowych jakościowych charakterystyk kopaliny i wykazano, że w dużym stopniu metoda ta podwyższa ryzyko decyzji opierających się na wynikach, które reprezentują jakość kopaliny, uzyskanych przy jej użyciu. Ryzyko decyzji uznania jako rzeczywistej jakości kopaliny, na którą wskazują wyniki oznaczeń, można zmniejszyć do pożądanego poziomu pod warunkiem zastosowania odpowiedniego wariantu metody wielowymiarowo-wektorowej estymacji jakościowej charakterystyki kopaliny.

Wprowadzenie

Kopaliny — bez znajomości ich parametrów jakościowych — są produktami bezużytecznymi. Dlatego też muszą być badane w celu oszacowania charakteryzujących je, jako surowce

* Doc. dr hab. inż., Główny Instytut Górnictwa, Katowice.

Recenzował prof. dr hab. inż. Kazimierz Sztaba

wyjściowe, właściwości. Wyniki oznaczeń lub pomiarów stanowią podstawę do uznania, że badana partia kopaliny należy do jednej z grup (np. klas) jakościowych według przyjętego dla niej podziału jakościowego (klasyfikacji). W ten sposób określona jakość jest przesłanką do zdecydowania o przydatności kopaliny z punktu widzenia różnych możliwości jej dostosowania do potrzeb użytkowników i odpowiedniego jej utylitarnego wykorzystania. Znajomość jakości kopaliny, jako nadawy do procesu technologicznego, prowadzi do decyzji dotyczącej ustalenia konkretnych wartości parametrów procesowych, w celu zapewnienia jego prawidłowego przebiegu.

Określenie jakości kopaliny, aby ją uwzględnić w celu uzyskania najkorzystniejszych efektów gospodarczych, ma duże znaczenie ekonomiczne. Mniej dokładne określenie jakości powoduje większe ryzyko wystąpienia straty finansowej. Jeżeli faktyczna jakość kopaliny odpowiada innej kategorii jakościowej niż to przyjęto według uzyskanych wyników badań, a parametry reprezentujące jakość danej partii kopaliny istotnie różnią się od rzeczywistych, podejmowane decyzje muszą prowadzić do powstania wymiernych, ujemnych skutków ekonomicznych, których poziom określają finansowe skutki oraz statystyczny rozkład ich występowania.

Racjonalne metody szacowania ryzyka są przedmiotem teorii ryzyka, która obecnie jest szeroko rozwijana, zarówno w aspektach teoretycznych, jak też praktycznych (Dziura 1994; Grzybowski 1994; Malina i inni 1998; Studenski 1994). W ilościowej interpretacji ryzyko decyzji definiuje się jako iloczyn potencjalnej straty finansowej oraz prawdopodobieństwa jej urzeczywistnienia się.

Oznaczając ryzyko decyzji, wynikające z niedokładności oszacowania jakościowej charakterystyki kopaliny symbolem R_{bj} , stratę czy ubytek finansowy wywołany decyzją opierającą się na parametrach reprezentujących parametry tej kopaliny — symbolem u , a prawdopodobieństwo takiej straty — symbolem P , otrzymuje się następujący wzór

$$R_{bj} = Pu$$

Strata finansowa u może powstawać u użytkownika albo u producenta kopaliny. Występuje wówczas, gdy parametry jakościowe, które reprezentują parametry danej partii kopaliny, odchylają się od nich więcej niż wynoszą dopuszczalne różnice między nimi a estymowanymi wartościami rzeczywistymi, przyjęte dla każdej właściwości kopaliny, należącej do zbioru określającego jej charakterystykę jakościową. Wobec tego prawdopodobieństwo straty u jest równe prawdopodobieństwu przekroczenia dopuszczalnej różnicy przez co najmniej jeden estymator parametru — w ich zbiorze tworzącym jakościową charakterystykę kopaliny.

Niezależnie od konkretnej wielkości, pieniężnej straty u , jej prawdopodobieństwo P_u wynika z prawdopodobieństwa, że partia kopaliny charakteryzuje się parametrami, które powodują tę stratę, chociaż ich estymatory przyporządkowane tejże partii, wykazują wartości liczbowe, które nie budzą pod tym względem niepokoju. Jest więc oczywiste, że zmniejszenie prawdopodobieństwa przekroczenia przez estymowane parametry ustalonych wartości granicznych dla estymatorów parametrów jakościowych partii kopaliny zmniejsza ryzyko R_{bj} wiążące się z błędnym oszacowaniem jakościowej czy technologicznej charakterystyki kopaliny. Ryzyko to jest ele-

mentem, który powinien być brany pod uwagę przy analizie ryzyka decyzji w procesach produkcyjnych i decyzji inwestycyjnych.

Przedstawienie możliwości zmniejszenia ryzyka błędu oszacowania właściwości decydujących o zakwalifikowaniu kopaliny do konkretnej kategorii jakościowej, aby podjąć w tym zakresie odpowiednie przedsięwzięcia, pozwoli na lepsze dostosowanie się do zasad gospodarki rynkowej.

1. Prawdopodobieństwo występowania parametrów jakościowych kopaliny poza granicami tolerancji estymacyjnych

Jeżeli charakterystykę jakościową kopaliny, rozumianą jako zespół parametrów poziomu rozmaitych właściwości, wspólnie branych pod uwagę przy ocenie jakości kopaliny, wyraża M parametrów, dla każdego z nich ustala się tolerancję estymacyjną, która określa obszar wokół estymatora, zawierający z zakładanym prawdopodobieństwem — estymowany parametr rzeczywisty. Mamy więc M tolerancji d_i , przy czym i jest liczbą porządkową poszczególnych właściwości w danej charakterystyce jakościowej.

W przypadku badań wyrzykowych, które polegają na badaniu drobnej ilości kontrolowanego produktu, aby wnioskować o właściwościach całej jego masy, prawdopodobieństwo wystąpienia określonej różnicy między wynikiem oznaczania a rzeczywistym parametrem, który cechuje tenże produkt, można określić jedynie pod warunkiem losowego wyboru elementów tworzących wspólnie daną jego partię. W warunkach losowego wyboru elementów, wspomniane prawdopodobieństwo zależy od statystycznej charakterystyki — takiej zbiorowości elementów, którą określono jako partię badanego produktu oraz od liczby elementów pobranych z tejże zbiorowości, których parametry składają się na wypadkowy wynik oznaczania (Hellwig 1987; Pawłowski 1972; Martyniak 1994).

Należy zwrócić uwagę na następującą okoliczność: wynik oznaczania każdej z M właściwości, które razem charakteryzują jakość kopaliny, jest zrealizowaną wartością liczbową pewnej zmiennej losowej. Jest to estymator i -tej właściwości. Zrealizowanie się konkretnej wartości liczbowej estymatora jest zdarzeniem losowym. Wyniki oznaczania wszystkich tych właściwości są wektorem losowym, przy czym jego składowe są zdarzeniami losowymi składowymi, w rezultacie których powstaje tenże wektor interpretowany, jako zdarzenie losowe złożone.

Obszarowi utworzonemu wokół estymatora x_i odpowiada prawdopodobieństwo P_i , że faktyczny parametr jakościowy partii kopaliny może znajdować się poza wartościami ograniczającymi tenże obszar. Jego dopełnieniem do jedności jest prawdopodobieństwo α_i , że estymowany parametr mieści się w granicach tolerancji. Jeżeli chodzi zatem o to, aby wyrazić prawdopodobieństwo P_0 , że nie wszystkie z M estymowanych parametrów zmieściły się w obszarach tolerancji, trzeba posłużyć się regułami rachunku prawdopodobieństwa. W tym celu należy określić prawdopodobieństwo α_0 , które jest dopełnieniem do jedności dla prawdopodobieństwa P_0 .

Prawdopodobieństwo α_0 jest to prawdopodobieństwo zdarzenia, że żaden z estymowanych parametrów partii kopaliny nie leży poza granicami tolerancji. Jest to więc zdarzenie losowe złożone, w którym elementarnymi zdarzeniami składowymi są poszczególne zdarze-

nia indywidualne — uzyskiwania wyników oznaczania każdego z tych parametrów jakościowych.

Skoro jakościową charakterystykę kopaliny wyraża M właściwości, które określają jej kategorię jakościową, nasuwa się wniosek, iż każda z nich może wykazywać parametry niezależne od intensywności pozostałych, charakteryzujących ją cech. Jest on przesłanką do przyjęcia założenia, że zdarzenia będące realizacjami poszczególnych zmiennych losowych, to jest wyniki oznaczania wspomnianych właściwości, są wzajemnie od siebie niezależne. Na podstawie tego założenia i zgodnie z zasadami rachunku prawdopodobieństwa, prawdopodobieństwo α_0 jest iloczynem prawdopodobieństw α_i :

$$\alpha_0 = \prod_1^M \alpha_i$$

które są prawdopodobieństwami, że poszczególne rzeczywiste parametry kopaliny znajdują się w granicach obszarów wyznaczonych za pomocą wymaganych tolerancji.

Ponieważ prawdopodobieństwa:

— α_0 , że żaden z estymowanych parametrów nie leży na zewnątrz odpowiadającego mu obszaru tolerancji oraz

— P_0 , że nie wszystkie z nich mieszczą się w obszarach wymaganych tolerancji, wzajemnie dopełniają się do jedności, zatem:

$$P_0 + \alpha_0 = 1$$

i

$$P_0 = 1 - \alpha_0 = 1 - \prod_1^M \alpha_i$$

2. Zasadniczy czynnik ryzyka decyzji o zakwalifikowaniu kopaliny do kategorii jakościowej według wyników oznaczania reprezentujących jej jakość

Ogólnie objaśnione na wstępie ryzyko R_{bj} , jako ryzyko decyzji opierającej się na przyjęciu za reprezentatywne wyników oznaczania właściwości przedstawiających jakość kopaliny, można ująć bardziej precyzyjnie — po uwzględnieniu przedstawionej powyżej interpretacji prawdopodobieństwa występowania parametrów jakościowych kopaliny poza tolerancjami estymacyjnymi. W poprzednio podanym wzorze zastępuje się mianowicie ogólny symbol P prawdopodobieństwa — jako zasadniczego czynnika ryzyka — symbolem P_0 , wyrażającym wspomniane prawdopodobieństwo:

$$R_{bj} = P_0 u$$

W dalszym ciągu analizuje się wpływ metody estymacji parametrów partii kopaliny na prawdopodobieństwo P_o , będące istotnym czynnikiem ryzyka R_{bj} ustalenia kategorii jakościowej kopaliny na podstawie wyników oznaczania, które są składowymi wektora przedstawiającego jej jakość.

3. Niepewność cechująca tradycyjną metodę estymacji jakościowych charakterystyk kopaliny

Tradycyjna metoda estymacji jakościowej charakterystyki kopaliny, jako wektora parametrów informujących o intensywności cech branych pod uwagę przy ocenie jakości danej kopaliny, polega na wyznaczeniu wielkości próbki ogólnej przy uwzględnieniu rozrzutu parametrów dotyczących tylko **jednej**, wybranej cechy spośród wszystkich, które składają się na pełną charakterystykę jej jakości. Należy wybrać tę właściwość, która wykazuje największą dyspersję parametrów w zbiorowości jednostek losowania (Gould 1938; Hassialis 1945; Kozin 1981; Krasnov 1969; Lokonov 1961; Resler, Riedl 1972; Sommer 1966—1999; Tomlinson 1953). Na przykład w przypadku węgla, najczęściej taką właściwością jest zawartość popiołu (Mielecki 1971).

Korzysta się wówczas z następujących danych:

- tolerancji estymacyjnej d ,
- poziomu ufności (prawdopodobieństwa), że parametr charakteryzujący daną partię kopaliny nie zostanie objęty obszarem otaczającym wartość liczbowa estymatora, odpowiadającym tolerancji d ,
- oszacowania wariancji V w zbiorowości jednostek losowania.

Wielkość próbki ogólnej określa liczba n próbek pierwotnych, która spełnia relację:

$$n = t_{\alpha}^2 \frac{V}{d^2}$$

gdzie:

t_{α} — współczynnik ufności dla rozkładu normalnego zależny od prawdopodobieństwa α .

Liczba n jednostek losowania zapewnia, że obszar ufności dokoła średniej wartości \bar{x} , na którą złożyło się n wartości liczbowych x_i , obejmie estymowany parametr \bar{X} z prawdopodobieństwem α .

Przeznaczając taką próbkę ogólną do oznaczania wielu właściwości kopaliny uważa się, że ponieważ wariancje innych właściwości w porównaniu z wariancją V są mniejsze, więc taka próbka jest w pełni wystarczająca do tego celu, przy czym pozostałe właściwości zostaną oznaczone nawet z większą dokładnością niż parametr \bar{X} . Gdyby bowiem obliczyć wielkość próbki ogólnej, potrzebną dla estymacji którejkolwiek z nich, liczba n byłaby mniejsza niż w przypadku, gdy posłużono się wariancją V . A zatem w ten sposób oznaczona charakterystyka jakościowa jest bardzo dokładna.

Czy takie uzasadnienie metody estymacji jakościowej charakterystyki kopaliny i wyciągnięty z tego wniosek jest słuszny, jeżeli poddaje się analizie i ocenie ryzyko decyzji zakwalifikowania kopaliny do konkretnej kategorii jakościowej na podstawie wyników oznaczania tą metodą?

Jak wynika z poprzednich rozważań, zasadniczym czynnikiem wspomnianego ryzyka jest prawdopodobieństwo P_o , które jest funkcją prawdopodobieństw α_i , określoną wzorem:

$$P_o = 1 - \prod_1^M \alpha_i$$

Należy zwrócić uwagę, że postępowanie zalecane w metodzie tradycyjnej precyzuje tylko jeden czynnik iloczynowy znajdującego się w powyższym wzorze, a mianowicie ten, który wiąże się z prawdopodobieństwem przyjętym dla estymacji parametru w zakresie cechy kopaliny, wykazującej wariancję V_{\max} . Oznaczając to prawdopodobieństwo symbolem $\alpha(V_{\max})$ otrzymuje się:

$$P_o = 1 - \alpha(V_{\max}) \prod_1^{M-1} \alpha_{(i \neq i(V_{\max}))}$$

Jak widać, oprócz znanego prawdopodobieństwa $\alpha(V_{\max})$, brak kolejnych składników iloczynowy prawdopodobieństw dla $i \neq i(V_{\max})$, które niestety są pominięte. Zamiast pożądanego łącznego prawdopodobieństwa P_o można obliczyć jedynie składowe prawdopodobieństwo $P(V_{\max})$ z równania:

$$P(V_{\max}) = 1 - \alpha(V_{\max})$$

Jednakże prawdopodobieństwo $P(V_{\max})$ nie jest równe prawdopodobieństwu P_o , które występuje we wzorze przedstawiającym ryzyko decyzji, wiążące się z wystąpieniem błędów obciążających wyniki oznaczeń, reprezentujące jakość kopaliny.

Tradycyjna metoda nie daje możliwości analizy prawdopodobieństwa P_o , a w konsekwencji także i ryzyka R_{ij} . W teorii ryzyka (Dziura 1994) sytuację taką uznaje się jako niepewną, a podejmowane wówczas decyzje — za decyzje podjęte w warunkach niepewności. Jest to sytuacja o wiele gorsza od takiej, w której prawdopodobieństwo będące czynnikiem ryzyka jest znane.

Jakie jest prawdopodobieństwo P_o w porównaniu z prawdopodobieństwem $P(V_{\max})$?

Niezależnie od konkretnych danych, precyzujących:

- liczbę jednostek losowania w próbkę ogólnej,
- tolerancję estymacyjną,
- wariancję właściwości w populacji jednostek losowania,

poszczególne prawdopodobieństwa $\alpha_{i \neq i(V_{\max})}$ są zawsze mniejsze niż 1. Pomimo więc, że wszystkie te prawdopodobieństwa mogą być większe niż prawdopodobieństwo $\alpha(V_{\max})$ — przy

- danej wielkości próbki ogólnej,
- mniejszych wariancjach $V_{i \neq i(\max)}$ oraz
- odpowiednio dobranych tolerancjach,

iloczyn tychże prawdopodobieństw i prawdopodobieństwa $\alpha(V_{\max})$ jest zawsze mniejszy niż każdy z jego czynników, w szczególności zaś:

$$\alpha(V_{\max}) \prod_{i=1}^{M-1} \alpha_{i \neq i(V_{\max})} < \alpha(V_{\max})$$

Wobec tego zawsze jest $P_o > P(V_{\max})$. Nierówność ta dowodzi, że rozpatrywane ryzyko z pewnością jest większe, niżby to wynikało z posłużenia się samym prawdopodobieństwem $P(V_{\max})$.

Jaką wartość może osiągać różnica między prawdopodobieństwem $P(V_{\max})$ i prawdopodobieństwem P_o ?

Prawdopodobieństwo $P(V_{\max})$ jest funkcją jednego, a prawdopodobieństwo P_o wszystkich prawdopodobieństw α_i zdarzeń składowych.

Prawdopodobieństwa α_i , przy założeniu rozkładu normalnego w populacji elementów, są dane wzorem:

$$\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d_i \sqrt{n}}{s_i}}^{\frac{d_i \sqrt{n}}{s_i}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Korzystając z przytoczonego wzoru, prawdopodobieństwa $P(V_{\max})$ i P_o można wyrazić następująco:

$$P(V_{\max}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d(V_{\max}) \sqrt{n}}{s_{\max}}}^{\frac{d(V_{\max}) \sqrt{n}}{s_{\max}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$P_o = 1 - \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d_i \sqrt{n}}{s_i}}^{\frac{d_i \sqrt{n}}{s_i}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Przeprowadzone rozważania wskazują, że większe będzie prawdopodobieństwo P_o , wobec tego uznaje się je za odjemną, a prawdopodobieństwo $P(V_{\max})$ za odjemnik — przy obliczaniu ich różnicy, za pomocą poniższych wzorów:

$$\Delta P = P_o - P(V_{\max})$$

$$\Delta P = 1 - \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-d_i\sqrt{n}}{s_i}}^{\frac{d_i\sqrt{n}}{s_i}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-d(V_{\max})\sqrt{n}}{s_{\max}}}^{\frac{d(V_{\max})\sqrt{n}}{s_{\max}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-d(V_{\max})\sqrt{n}}{s_{\max}}}^{\frac{d(V_{\max})\sqrt{n}}{s_{\max}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz - \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{-d_i\sqrt{n}}{s_i}}^{\frac{d_i\sqrt{n}}{s_i}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Jak widać, rozważana różnica jest różnicą między prawdopodobieństwem przyjętym dla estymacji parametru kopaliny, wskazującego intensywność własności cechującej się największą dyspersją parametrów w populacji jednostek losowania, a iloczynem prawdopodobieństw estymacji wszystkich parametrów, które wspólnie tworzą jakościową charakterystykę kopaliny.

Poszczególne prawdopodobieństwa estymacyjne α_i są funkcjami przyjętych tolerancji d_i i odchyłeń standardowych s_i . W praktyce zazwyczaj nie akceptuje się tej samej wartości liczbowej tolerancji dla wszystkich oznaczanych parametrów. Przeważa tendencja do zróżnicowania tolerancji — w nawiązaniu do obowiązującego w normach, cennikach i innych dokumentach dotyczących jakościowej klasyfikacji kopaliny, podziału zakresu zmienności charakterystycznych właściwości i uzgodnionych między kontrahentami wymagań pod względem kształtowania się poszczególnych parametrów jakościowych. Najczęściej pożądane są węższe tolerancje dla parametrów wykazujących mniejszy rozrzut. W takim zaś przypadku ilorazy $d_i : s_i$ nie wykazują większych różnic. Można więc założyć, nie popełniając dużego błędu, że poszczególne prawdopodobieństwa α_i , do których zalicza się również prawdopodobieństwo $\alpha(V_{\max})$, w przybliżeniu są sobie równe.

Oszacowując różnicę ΔP na podstawie tego założenia widać, że

$$\Delta P \approx \alpha(V_{\max}) - \alpha^M(V_{\max})$$

gdź odjemną w poprzednim wzorze jest prawdopodobieństwo $\alpha(V_{\max})$, a odjemnikiem iloczyn M prawdopodobieństw α_i , przy czym jedno z nich jest tym właśnie prawdopodobieństwem, a pozostałe mało się różnią od niego i od siebie.

Z tego wynika, że różnica między prawdopodobieństwem $P(V_{\max})$ i prawdopodobieństwem P_0 może osiągać rząd wielkości porównywalnej z ustalonym (założonym) prawdopodobieństwem $\alpha(V_{\max})$, przy odpowiednio dużej liczbie M .

Oszacowanie kształtowania się różnicy ΔP pozwala na wykazanie, iż prawdopodobieństwo P_0 zdarzenia złożonego, to jest wystąpienia co najmniej jednego z parametrów jakościowych kopaliny, poza tolerancjami estymacyjnymi dla wyników oznaczeń, zależy głównie od liczby M — według funkcji, która cechuje się przebiegiem zbliżonym do wykładniczego:

$$P_o = \Delta P + P(V_{\max}) \cong \alpha(V_{\max}) - \alpha^M(V_{\max}) + 1 - \alpha(V_{\max}) = 1 - \alpha^M(V_{\max})$$

Prawdopodobieństwo P_o zdarzenia, że nie wszystkie granice tolerancji, ustalone dla oznaczanych parametrów jakościowych, obejmą obszary występowania parametrów cechujących partię kopaliny, charakteryzujące tradycyjną metodę estymacji jakościowych charakterystyk kopaliny, będące czynnikiem ryzyka R_{bj} , rośnie więc bardzo szybko, gdy powiększa się liczba M parametrów wspólnie decydujących o jakości kopaliny.

Przeprowadzone rozważania świadczą o bardzo dużym stopniu niepewności decyzji dotyczących ustalenia jakościowej kategorii kopaliny, podejmowanych na podstawie rezultatów badań laboratoryjnych przy zastosowaniu tradycyjnej metody w celu estymacji wielowymiarowych jakościowych charakterystyk kopaliny.

4. Niepewność cechująca tradycyjną metodę estymacji jakościowych charakterystyk składników kopaliny

W praktyce częstokroć istnieje potrzeba wyznaczania jakościowych charakterystyk różnych składników (komponentów), których mieszaniną jest kopalina.

W tradycyjnej metodzie estymacji jakościowych charakterystyk składników kopaliny, na przykład klas ziarnowych i frakcji gęstościowych, do badań kieruje się próbki ogólne, których wielkość określono ze względu na nierównomierność parametrów (w zakresie wybranej cechy kopaliny) — populacji, które są mieszaniną tych komponentów, to znaczy parametrów, które w poszczególnych jednostkach tychże populacji są wypadkowymi tworzącymi je składników, a zatem — nie jest to zmienność wykazywana przez wspomniane składniki, lecz zmienność określona w mieszaninie komponentów tworzących kopalinę. Z takich próbek ogólnych wydziela się badane komponenty, które następnie są próbkami przeznaczonymi do oznaczania ich jakościowych charakterystyk.

W tym przypadku powstaje sytuacja o wiele gorsza pod względem stopnia niepewności, podważającego wiarygodność zarówno łącznego zestawienia komponentowych charakterystyk jakościowych, jak i poszczególnych zestawień komponentowych estymatorów parametrów jakościowych, niż sytuacja występująca wówczas, gdy estymuje się zbiór średnich parametrów wyrażających jakość kopaliny traktowanej jako jedna całość, bez wnikania w jej strukturę komponentową. Badania takie są realizowane z pominięciem zasad metody reprezentacyjnej, przedstawionych w literaturze specjalistycznej (Steczowski 1988).

Z punktu widzenia teorii estymacji, te same zasady są istotne i powinny być uwzględniane tak w metodach estymacji parametrów, które ogólnie charakteryzują całą masę kopaliny, jak też w metodach estymacji parametrów cechujących różne jej komponenty (składniki). Jednakże w przypadku estymacji parametrów określających jakość składników kopaliny, wcale nie bada się, a co za tym idzie — nie uwzględnia się zmienności tych parametrów w populacji jednostek losowania, pochodzących z danego składnika w poszczególnych próbkach pierwotnych, pobieranych z kopaliny. W związku z tym nie ma żadnego punktu odniesienia, który mógłby służyć do chociażby przybliżonej oceny dokładności wyników oznaczania jakościowych charakterystyk komponentów kopaliny, wydzielanych z próbek

ogólnych. W szczególności zaś nie wiadomo, jakie jest prawdopodobieństwo, że estymowany parametr mieści się w pożądanym zakresie tolerancji, lub że grupa estymowanych parametrów mieści się w takichże granicach.

W konsekwencji brak jakichkolwiek podstaw do określenia prawdopodobieństwa kształtującego ryzyko, które wiąże się z niedokładnością estymacji parametrów jakościowych, charakteryzujących badany składnik kopaliny, gdy korzysta się z jej tradycyjnej metody. Ale rozumowanie analogiczne do przytoczonego w poprzednim rozdziale wskazuje, że rozpatrywane prawdopodobieństwo może być znacznie większe niż prawdopodobieństwo, które jest elementem ryzyka, gdy oznacza się jakość kopaliny, nie oznaczając jakościowych charakterystyk jej komponentów.

5. Prawdopodobieństwo kształtujące ryzyko wynikające z błędu oceny jakości kopaliny przy zastosowaniu metody estymacji wielowymiarowej

W metodzie estymacji wielowymiarowej (Martyniak 1994, 1997), która dotyczy wyznaczenia jakościowej charakterystyki całej ilości kopaliny w postaci naturalnej mieszaniny ziarn o różnych właściwościach, ustala się prawdopodobieństwo α i tolerancje d_i dla estymatorów parametrów wchodzących w skład oznaczanej w kopalinie charakterystyki jakościowej. Prawdopodobieństwo α jest to prawdopodobieństwo, że wszystkie estymatory oznaczanych parametrów nie będą się odchylały od tychże parametrów więcej niż wynoszą przyjęte tolerancje d_i . Dane te, oraz statystyczne parametry wielowymiarowego rozkładu właściwości w populacji jednostek losowania, są podstawą do obliczenia odpowiedniej liczby n tychże jednostek, które należy pobrać z ich populacji, aby zapewnić pożądaną dokładność estymacji, sprecyzowaną za pomocą prawdopodobieństwa α oraz tolerancji d_i . Do obliczeń liczby n służy wzór:

$$\prod_{i=1}^M \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d_i}{s_i}\sqrt{n}}^{\frac{d_i}{s_i}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \alpha$$

Posłużenie się tą metodą estymacji pozwala na bezpośrednie przedstawienie prawdopodobieństwa P_o , które wynika z jej zastosowania, gdyż

$$P_o = 1 - \alpha$$

Jeżeli, jako prawdopodobieństwo α zostanie wykorzystana, często uwzględniania w praktyce liczba 0,95, wówczas prawdopodobieństwo mające wpływ na ryzyko niedokładności oszacowania jakościowej charakterystyki kopaliny wyniesie 0,05.

O oto przykłady porównania tradycyjnej i wielowymiarowej metody estymacji charakterystyk jakościowych węgla handlowego.

Przykład 1

Z partii koncentratu węglowego w sortymencie Kostka należy pobrać próbkę ogólną do oznaczania zawartości popiołu A^r , wilgoci W_1^r i siarki całkowitej S_1^r , spełniającą wymagania miarodajności, dane poziomem ufności $\alpha = 0,95$ i następującymi tolerancjami dla próbkowych estymatorów:

Tolerancja estymacyjna	Parametr jakościowy		
	A^r	W_1^r	S_1^r
d	0,5	0,5	0,1

(Problem doboru tolerancji estymacyjnych dla poszczególnych właściwości jest dyskutowany w publikacji (Martyniak 1994)).

Posiadane dane wskazują, że węgiel ten, w populacji próbek pierwotnych, charakteryzuje się następującymi odchyleniami standardowymi oznaczanych parametrów jakościowych:

Odchylenie standardowe	Parametr jakościowy		
	A^r	W_1^r	S_1^r
s	2,0	0,7	0,2

1. Obliczenie liczby n próbek pierwotnych metodą tradycyjną

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{0,5}{2,0}\sqrt{n}}^{\frac{0,5}{2,0}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

Liczba próbek pierwotnych, spełniająca wymagania dokładności estymacyjnej, jest najmniejszą liczbą całkowitą, odpowiadającą warunkowi

$$n \geq 1,96^2 \cdot 2^2 : 0,5^2$$

zatem

$$n = 62$$

2. Obliczenie liczby n próbek pierwotnych metodą estymacji wielowymiarowej

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{0,5}{2,0}\sqrt{n}}^{\frac{0,5}{2,0}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,5}{0,7}\sqrt{n}}^{\frac{0,5}{0,7}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,2}{0,1}\sqrt{n}}^{\frac{0,2}{0,1}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

Podobnie jak poprzednio, liczba n jest najmniejszą liczbą całkowitą, dla której lewa strona równania jest równa lub większa niż 0,95. Obliczenia powinny być wykonywane przy użyciu komputera. Sposób obliczeń polega na podstawianiu kolejnych liczb n w lewej stronie powyższego równania, aż natrafi się na liczbę n spełniającą pożądaną poziom dokładności estymacyjnej.

Najmniejszą liczbą całkowitą, która odpowiada podanemu, wielowymiarowemu kryterium estymacyjnemu jest liczba równa 62.

Jak widać, w rozpatrywanym przykładzie danych wyjściowych, metody obliczeń: tradycyjna i wielowymiarowa — dają ten sam wynik. A zatem są przypadki, gdy rezultaty obliczeń dokonanych porównywanymi metodami są podobne.

Warto jeszcze zauważyć, że gdyby dla próbki ogólnej przyjąć tolerancję zawartości popiołu, równą $\pm 1\%$, pozostawiając te same tolerancje dla zawartości wilgoci i siarki, to pożądana liczba próbek pierwotnych, obliczona metodą tradycyjną, wynosi 16, ale przy zastosowaniu metody estymacji wielowymiarowej jest większa, gdyż rozważane zasady obliczeń prowadzą do liczby 20, jako liczby odpowiadającej zakładanemu, wielowymiarowemu kryterium estymacyjnemu.

Przykład 2

Przedmiotem badania kontrolnego na zawartość popiołu A^r , wilgoci W_t^r i siarki całkowitej S_t^r , jest partia półproduktów węglowych o granulacji $-20 + 0$ mm. Ustalono, że próbka ogólna powinna odpowiadać wymaganiom dotyczącym jej reprezentatywności, które są wyrażone za pomocą poziomu ufności $\alpha = 0,95$ i poniższych tolerancji estymacyjnych dla parametrów wykazywanych przez próbkę ogólną:

Tolerancja estymacyjna	Parametr jakościowy		
	A^r	W_t^r	S_t^r
d	2,0	0,5	0,1

Z wyników przeprowadzonych badań specjalnych wiadomo, że kontrolowane półprodukty, w populacji próbek pierwotnych, w przybliżeniu cechują się odchyleniami standardowymi ujętymi w poniższym zestawieniu:

Odchylenie standardowe	Parametr jakościowy		
	A^r	W_t^r	S_t^r
s	7,0	1,1	0,3

1. Obliczenie liczby n próbek pierwotnych metodą tradycyjną

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{2,0}{7,0}\sqrt{n}}^{\frac{2,0}{7,0}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

$$n = 48$$

2. Obliczenie liczby n próbek pierwotnych metodą estymacji wielowymiarowej

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\frac{2,0}{7,0}\sqrt{n}}^{\frac{2,0}{7,0}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{-\frac{0,5}{1,1}\sqrt{n}}^{\frac{0,5}{1,1}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{-\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n}}^{\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

$$n = 55$$

Z punktu widzenia zasad metody reprezentacyjnej badań, zalecanej w badaniach wyrywkowych, kiedy bada się tylko niektóre elementy populacji generalnej i na tej podstawie wyciąga się wnioski dotyczące całej populacji, odpowiednią liczbą próbek pierwotnych, która wynika z przyjętego warunku statystycznego przybliżenia parametrów próbki ogólnej, jest zatem liczba 55.

Jeżeli więc oznacza się zawartość popiołu, zawartość wilgoci i zawartość siarki całkowitej w próbce ogólnej tych półproduktów, wyznaczonej metodą tradycyjną, składającej się z 48 próbek pierwotnych, w rzeczywistości uzyskuje się mniejszą dokładność estymacyjną niż byłoby to pożądane, zgodnie z wymogami obejmującymi wszystkie oznaczane parametry. Stopień zmniejszenia się dokładności, w stosunku do konkretnych tolerancji estymacyjnych, można oszacować metodą omówioną w publikacjach (Martyniak 1994, 1997). W rozpatrywanym przykładzie, powiększenie się tolerancji estymacyjnych dla poszczególnych parametrów jakościowych, względem przyjętych jako wyjściowe, jest następujące:

$$d_{48}(A^r) = 2,0 \sqrt{\frac{55}{48}} = 2,14$$

$$d_{48}(W_t^r) = 0,5 \sqrt{\frac{55}{48}} = 0,54$$

$$d_{48}(S_t^r) = 0,1 \sqrt{\frac{55}{48}} = 0,11$$

6. Prawdopodobieństwo kształtujące ryzyko wynikające z błędu oceny jakości komponentów kopaliny przy zastosowaniu metody estymacji wektorowej

Metoda estymacji wektorowej (Martyniak 1994, 1997) ma zastosowanie w przypadku, gdy estymuje się charakterystykę jakościową co najmniej jednego komponentu, który wchodzi w skład próbki ogólnej, jest z niej wydzielany i stanowi próbkę przeznaczoną do oznaczania wspomnianej charakterystyki. Polega ona na ustaleniu odpowiedniego, ogólnego prawdopodobieństwa estymacyjnego α , łącznie dla wszystkich badanych składników kopaliny oraz tolerancji estymacyjnych dla estymatorów poszczególnych parametrów jakościowych w każdym składniku kopaliny. Prawdopodobieństwo α jest zatem prawdopodobieństwem, że granice tolerancji wokół wszystkich estymatorów obejmą rzeczywiste parametry składników w całej masie opróbowanej kopaliny. Prawdopodobieństwo α oraz zasada zachowania takich samych prawdopodobieństw estymowania każdego z oznaczanych parametrów jakościowych w komponentach kopaliny, są punktem wyjścia do wyznaczenia poszczególnych, komponentowych prawdopodobieństw estymacyjnych α_j (j — jest liczbą porządkową komponentu kopaliny). Jeżeli więc w j -tym komponentie oznacza się M_j parametrów jakościowych, prawdopodobieństwo α_j jest równe

$$\alpha_j = \alpha \left(\sum_j M_j \right)^{-1}$$

Następnie prawdopodobieństwa te służą do obliczenia liczb n_j jednostek losowania, które powinny pochodzić z j -tego komponentu, aby zapewnić ich średnim wartościom dokładność estymacyjną, określoną przyjętymi tolerancjami. Do obliczeń niezbędna jest znajomość przybliżonych wartości liczbowych statystycznych parametrów wektorowych rozkładów właściwości w populacjach komponentowych jednostek losowania. Odpowiedni wzór obliczeniowy jest podobny do poprzedniego:

$$\prod_1^{M_j} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d_{ij}}{s_{ij}}\sqrt{n_j}}^{\frac{d_{ij}}{s_{ij}}\sqrt{n_j}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \alpha_j = \alpha \left(\sum_j M_j \right)^{-1}$$

W ten sposób wyznacza się liczby jednostek losowania, które powinny reprezentować poszczególne komponenty kopaliny w próbce ogólnej, aby w przypadku każdego z nich osiągnąć pożądaną precyzję estymacyjną. Jest to pierwszy etap postępowania w metodzie estymacji wektorowej.

Drugi etap postępowania ma na celu określenie warunków, których zachowanie umożliwi pozyskanie w próbce ogólnej liczb jednostek losowania reprezentujących badane komponenty, nie mniejszych niż obliczone liczby n_j w pierwszym etapie postępowania.

Jak wiadomo, ilości poszczególnych komponentów kopaliny, zarówno w próbkach pierwotnych, jak i w próbce ogólnej, są zmiennymi losowymi. Wobec tego liczby jednostek loso-

wania, pożądane z różnych komponentów kopaliny w próbce ogólnej, można interpretować w niej, jako liczby oczekiwane i przyjąć probabilistyczne kryterium prowadzące do ustalenia statystycznego warunku ich pozyskania. W metodzie estymacji wektorowej kryterium to jest zarazem kryterium reprezentatywności próbki ogólnej. Jest to prawdopodobieństwo β równoczesnego zrealizowania się w próbce ogólnej konkretnych liczb n_{kj} , które naturalnie nie powinny być mniejsze niż odpowiednie liczby n_j , przyjęte jako pożądane, a więc:

$$n_{kj} \geq n_j$$

Według prawdopodobieństwa β znajduje się warunek najmniejszej liczebności N próbek pierwotnych, jako jednostek losowania, w próbce ogólnej. Taka próbka ogólna zapewnia pozyskanie w niej z prawdopodobieństwem β komponentowych liczb jednostek losowania n_{kj} , co najmniej równych pożądanym liczbom n_j . Liczba N jest dana wzorem:

$$\prod_j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{N-n_j}{\sqrt{N(1-\gamma_j)}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \beta$$

w którym γ_j jest ułankowym udziałem j -tego komponentu w opróbowywanej partii kopaliny.

Reasumując, metoda estymacji wektorowej opiera się na wykorzystaniu zasad estymacji wielowymiarowej w stosunku do jakościowych charakterystyk wyodrębnianych z kopaliny komponentów. Dzięki temu wyznacza się liczby jednostek losowania z poszczególnych komponentów, spełniające wymagania pod względem dokładności estymacyjnej. Zasadniczym wymaganiem jest poziom ogólnego prawdopodobieństwa α , że we wszystkich charakterystykach komponentowych estymowane parametry jakościowe będą znajdowały się w granicach ustalonych tolerancji.

Drugim istotnym elementem metody estymacji wektorowej jest zastosowanie probabilistycznego kryterium pozyskania w próbce ogólnej poprzednio znalezionych liczb jednostek losowania, pochodzących z badanych komponentów kopaliny.

Przedstawione zasady estymacji wektorowej uzasadniają posłużenie się prawdopodobieństwem α do określenia prawdopodobieństwa P_o , jako czynnika ryzyka poniesienia straty finansowej z powodu przybliżenia obciążającego wyniki estymacji parametrów wchodzących w skład jakościowej charakterystyki partii kopaliny. Używa się w tym celu tego samego co poprzednio wzoru, a mianowicie:

$$P_o = 1 - \alpha$$

Zakładane prawdopodobieństwo estymacyjne α ma wpływ z jednej strony na prawdopodobieństwo P_o będące czynnikiem ryzyka R_{nj} , z drugiej zaś — na koszty opróbowania, proporcjonalne do liczby N próbek pierwotnych w próbce ogólnej. Liczba próbek pierwotnych w próbce

ogólnej zależy też od przyjętego prawdopodobieństwa β otrzymania w próbce ogólnej pożądaných ilości badanych komponentów kopaliny.

Najkorzystniejszy ekonomicznie poziom prawdopodobieństw α i β , powinna określić minimalizacja sumy składającej się z:

- prawdopodobnej straty finansowej, która wynika z niedokładności estymacji wielowymiarowo-wektorowej charakterystyki kopaliny oraz
- kosztów jej opróbowania i badania,

Poniżej podano przykład porównania tradycyjnej i wektorowej metody estymacji charakterystyki gęstościowej węgla surowego.

Należy pobrać próbkę węgla surowego o granulacji $-200 + 20$ mm, przeznaczoną do oznaczania charakterystyki gęstościowej. Program badań laboratoryjnych przewiduje wydzielenie dziewięciu frakcji gęstościowych oraz oznaczenie w każdej z nich zawartości popiołu A^a , wilgoci analitycznej W^a i siarki całkowitej S_t^a . Wielkość próbki powinna uwzględniać wymagania określające jej miarodajność według statystycznego, wielowymiarowo-wektorowego kryterium. Są one następujące:

- poziom ufności $\alpha = 0,95$ dla odchyłeń parametrów próbki od wartości oczekiwanych,
- tolerancje estymacyjne, jako odchylenia graniczne poszczególnych parametrów próbki od wartości oczekiwanych:

Liczba porządkowa frakcji	Tolerancje estymacyjne			
	$d(\gamma)$	$d(A^a)$	$d(W^a)$	$d(S_t^a)$
1	2,0	0,1	0,1	0,1
2	1,0	0,2	0,1	0,1
3	0,5	0,5	0,1	0,1
4	0,5	0,5	0,1	0,1
5	0,2	1,0	0,1	0,1
6	0,2	1,0	0,1	0,1
7	0,2	2,0	0,1	0,1
8	0,5	2,0	0,1	0,1
9	—	2,0	0,1	0,1

Ostateczną wielkość próbki należy przyjąć, odpowiadającą probabilistycznemu kryterium, wyrażonemu prawdopodobieństwem $\beta = 0,95$, że poszczególne frakcje dostaną się do niej, w co najmniej pożądaných ilościach, według poprzednio przyjętego, wielowymiarowo-wektorowego kryterium.

W zestawieniu poniżej podano przybliżone dane charakteryzujące badany węgiel surowy.

Liczba porządkowa frakcji	Udział frakcji γ	Odchylenia standardowe			
		$s(\gamma)$	$s(A^a)$	$s(W^a)$	$s(S_i^a)$
1	0,3	5,0	0,4	0,3	0,2
2	0,2	3,0	0,7	0,4	0,3
3	0,1	2,0	1,1	0,35	0,25
4	0,05	1,0	1,2	0,3	0,3
5	0,03	0,8	1,5	0,2	0,4
6	0,02	0,8	1,8	0,2	0,4
7	0,02	0,8	2,6	0,15	0,45
8	0,03	1,0	3,2	0,15	0,5
9	0,25	—	4,5	0,1	0,35
Razem	1,00	—	6,5	—	—

1. Obliczenie liczby n_0 próbek pierwotnych metodą tradycyjną

A. $d(A^a) = 2,0\%$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{2,0}{6,5}\sqrt{n_0}}^{\frac{2,0}{6,5}\sqrt{n_0}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

Najmniejsza liczba całkowita n_0 , spełniająca warunek

$$n_0 \geq 1,96^2 \times 6,5^2 : 2^2$$

jest równa

$$n_0 = 41$$

B. $d(A^a) = 1,0\%$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{1,0}{6,5}\sqrt{n_0}}^{\frac{1,0}{6,5}\sqrt{n_0}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

a stąd

$$n_0 = 163$$

2. Obliczenie liczby n_0 próbek pierwotnych metodą estymacji wielowymiarowo-wektorowej.

Poniżej zestawiono oznaczane parametry w węglu surowym i jego poszczególnych komponentach

Komponent węgla surowego	Symbole oznaczanych parametrów z uwzględnieniem ich liczb porządkowych i oraz liczb porządkowych j wektorów zawierających te parametry	Liczba porządkowa j wektora parametrów	Liczba M_j parametrów tworzących wektor
Całość składająca się ze wszystkich komponentów	$(\gamma_1)_1, (\gamma_2)_1, (\gamma_3)_1, (\gamma_4)_1, (\gamma_5)_1, (\gamma_6)_1, (\gamma_7)_1, (\gamma_8)_1$	1	8
Fracja nr 1	$(A^a_1)_2, (W^a_2)_2, (S^a_3)_2$	2	3
Fracja nr 2	$(A^a_1)_3, (W^a_2)_3, (S^a_3)_3$	3	3
Fracja nr 3	$(A^a_1)_4, (W^a_2)_4, (S^a_3)_4$	4	3
Fracja nr 4	$(A^a_1)_5, (W^a_2)_5, (S^a_3)_5$	5	3
Fracja nr 5	$(A^a_1)_6, (W^a_2)_6, (S^a_3)_6$	6	3
Fracja nr 6	$(A^a_1)_7, (W^a_2)_7, (S^a_3)_7$	7	3
Fracja nr 7	$(A^a_1)_8, (W^a_2)_8, (S^a_3)_8$	8	3
Fracja nr 8	$(A^a_1)_9, (W^a_2)_9, (S^a_3)_9$	9	3
Fracja nr 9	$(A^a_1)_{10}, (W^a_2)_{10}, (S^a_3)_{10}$	10	3
Ogółem	—	$k = 10$	$\Sigma M_j = 35$

Należy zwrócić uwagę, że oznaczając zawartości k komponentów w ich mieszaninie, których ułamkowe udziały — po ich zsumowaniu — dają liczbę 1, w rzeczywistości wyznacza się tylko $k - 1$ niewiadomych, ponieważ ostatnia zawartość jest określona przez sumę poprzednio oznaczonych zawartości, jako ich dopełnienie do 1 lub 100%. Wówczas statystyczne przybliżenie wypadkowej zawartości komponentu wynika ze statystycznych przybliżeń poszczególnych składników otrzymanej ich sumy. Dlatego też ostatniego składnika wydzielonego z mieszaniny nie uwzględnia się w liczbie oznaczanych składników, określających liczbę czynników wielowymiarowego iloczynu prawdopodobieństw w kryterium estymacyjnym.

Z przytoczonego zestawienia przedstawiającego program badań laboratoryjnych wynika, że próbka ogólna jest przeznaczona do oznaczania 35 parametrów jakościowych, cechujących

10 grup (podzbiorów) ziarn węgla surowego, mających różne zakresy fizycznych właściwości. Parametry każdego badanego podzbioru ziarn (komponentu) węgla surowego są wektorem losowym.

A. Obliczenie próbkowych komponentowych prawdopodobieństw estymacyjnych α_j .

Obliczenia przeprowadza się, biorąc jako wyjściowe, poprzednio podane ogólne prawdopodobieństwo $\alpha = 0,95$, że wszystkie próbkowe estymatory oznaczanych parametrów odchyłają się od wartości oczekiwanych nie więcej niż to wynika z ustalonych tolerancji estymacyjnych:

$$\alpha_1 = 0,95^{8/35}$$

$$\alpha_2, \dots, \alpha_{10} = 0,95^{3/35}$$

B. Obliczenie liczb n_j jednostek losowania, które powinny reprezentować j-ty komponent, aby zostały spełnione wymagania dotyczące precyzji estymatorów tego komponentu — na tle miarodajności próbki ogólnej.

$j = 1$

$$\prod_1^8 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{d_i}{s_i}\sqrt{n_i}}^{\frac{d_i}{s_i}\sqrt{n_i}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{8/35}$$

$$n_1 = 200$$

$j = 2$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_2}}^{\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{-\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n_2}}^{\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n_2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{-\frac{0,1}{0,2}\sqrt{n_2}}^{\frac{0,1}{0,2}\sqrt{n_2}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_2 = 130$$

$j = 3$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{-\frac{0,2}{0,7}\sqrt{n_3}}^{\frac{0,2}{0,7}\sqrt{n_3}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{-\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_3}}^{\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_3}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{-\frac{0,1}{0,25}\sqrt{n_3}}^{\frac{0,1}{0,25}\sqrt{n_3}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_3 = 136$$

24

j = 4

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{0,5}{1,1}\sqrt{n_4}}^{\frac{0,5}{1,1}\sqrt{n_4}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,35}\sqrt{n_4}}^{\frac{0,1}{0,35}\sqrt{n_4}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,25}\sqrt{n_4}}^{\frac{0,1}{0,25}\sqrt{n_4}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_4 = 99$$

j = 5

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{0,5}{1,2}\sqrt{n_5}}^{\frac{0,5}{1,2}\sqrt{n_5}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n_5}}^{\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n_5}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n_5}}^{\frac{0,1}{0,3}\sqrt{n_5}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_5 = 84$$

j = 6

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{1,0}{1,5}\sqrt{n_6}}^{\frac{1,0}{1,5}\sqrt{n_6}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,2}\sqrt{n_6}}^{\frac{0,1}{0,2}\sqrt{n_6}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_6}}^{\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_6}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_6 = 129$$

j = 7

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{1,0}{1,8}\sqrt{n_7}}^{\frac{1,0}{1,8}\sqrt{n_7}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,2}\sqrt{n_7}}^{\frac{0,1}{0,2}\sqrt{n_7}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_7}}^{\frac{0,1}{0,4}\sqrt{n_7}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_7 = 129$$

j = 8

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{2,0}{2,6}\sqrt{n_8}}^{\frac{2,0}{2,6}\sqrt{n_8}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,15}\sqrt{n_8}}^{\frac{0,1}{0,15}\sqrt{n_8}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,11}{0,45}\sqrt{n_8}}^{\frac{0,11}{0,45}\sqrt{n_8}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_8 = 163$$

$j = 9$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{2,0}{3,2}\sqrt{n_9}}^{\frac{2,0}{3,2}\sqrt{n_9}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,15}\sqrt{n_9}}^{\frac{0,1}{0,15}\sqrt{n_9}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,35}\sqrt{n_9}}^{\frac{0,1}{0,35}\sqrt{n_9}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_9 = 201$$

$j = 10$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 \int_{\frac{2,0}{4,5}\sqrt{n_{10}}}^{\frac{2,0}{4,5}\sqrt{n_{10}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,1}\sqrt{n_{10}}}^{\frac{0,1}{0,1}\sqrt{n_{10}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz \int_{\frac{0,1}{0,35}\sqrt{n_{10}}}^{\frac{0,1}{0,35}\sqrt{n_{10}}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95^{3/35}$$

$$n_{10} = 99$$

C. Obliczenie liczby n_0 próbek pierwotnych w próbce ogólnej, zawierającej z prawdopodobieństwem $\beta = 0,95$ — liczby jednostek losowania, równe co najmniej odpowiednim liczbom n_j :

$$\prod_{j=1}^{10} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{n_0 - n_j}{\sqrt{n_0(l-1)}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = 0,95$$

$$n_0 = 226$$

D. Porównanie tolerancji estymacyjnych dla wychodów frakcji, otrzymanych w próbce ogólnej wyznaczonej metodą tradycyjną z tolerancjami dopuszczalnymi, które kształtują próbkę obliczoną metodą estymacji wielowymiarowo-wektorowej.

W celu osiągnięcia podanych w tablicy tolerancji estymacyjnych dla wychodów frakcji gęstościowych, potrzebna jest próbka licząca $n_1 = 200$ jednostek losowania, jak to wynika z obliczenia przeprowadzonego według metody wielowymiarowo-wektorowej. Metoda tradycyjna, w której nie uwzględnia się takich tolerancji w celu wyznaczenia wielkości próbki ogólnej, lecz poprzestaje się na tolerancji dotyczącej zawartości popiołu w próbce ogólnej, prowadzi do liczby $n = 163$ jednostek losowania, jako zapewniających miarodajność próbki ogólnej.

Dla przyjętego poziomu ufności, analogicznie jak w przykładzie pierwszym, można obliczyć zmniejszenie się dokładności estymacyjnej przy mniejszej liczbie jednostek losowania, składających się na średnie wartości — w stosunku do dokładności, którą zapewnia liczba tychże jednostek, określona z jej uwzględnieniem. Zmniejszenie się dokładności estymacyjnej przedstawia poszerzenie się tolerancji estymacyjnych, obejmujących poszczególne parametry w próbce ogólnej. W rozpatrywanym przypadku współczynnikiem poszerzającym tolerancje estymacyjne jest liczba

$$\sqrt{\frac{200}{163}} \cong 1,11$$

Poniżej zamieszczono zestawienie tolerancji estymacyjnych dopuszczalnych, którym odpowiada wielkość próbki ogólnej, określona metodą estymacji wielowymiarowo-wektorowej i tolerancji estymacyjnych, charakteryzujących próbkę ogólną o wielkości przyjętej zgodnie z metodą tradycyjną.

Liczba porządkowa frakcji	1	2	3	4	5	6	7	8
Dopuszczalne tolerancje estymacyjne	2,00	1,00	0,50	0,20	0,20	0,20	0,20	0,50
Tolerancje estymacyjne odpowiadające próbce tradycyjnej	2,22	1,11	0,56	0,22	0,22	0,22	0,22	0,56

Wnioski

1. Minimalizacja ryzyka decyzji podejmowanych na podstawie wyników oznaczania jakościowych charakterystyk kopaliny jest niezbędna w warunkach gospodarki rynkowej.

2. Ryzyko decyzji opartych na jakościowych charakterystykach próbek kopaliny zależy od prawdopodobieństwa, że wszystkie oznaczone parametry, które charakteryzują kopalinę, różnią się od rzeczywistych jej parametrów nie więcej niż wynika to z ustalonych tolerancji estymacyjnych.

3. Tradycyjna metoda oznaczania jakościowych charakterystyk kopaliny nie uwzględnia faktu, że jakościowa charakterystyka kopaliny składa się z wielu parametrów wyrażających intensywność różnych jej cech, a zatem jest wielowymiarowa. W konsekwencji pomija zasady metody reprezentacyjnej. W szczególności zaś nie określa prawdopodobieństwa wystąpienia określonych różnic między wynikami oznaczeń a parametrami faktycznie cechującymi kopalinę.

4. Przy stosowaniu tradycyjnej metody oznaczania jakościowych charakterystyk kopaliny brak danych, aby określić prawdopodobieństwo wiążące się z ryzykiem decyzji podejmowanej na podstawie tak uzyskanej charakterystyki jakościowej. Wobec tego wszystkie te decyzje są podejmowane w warunkach niepewności. Jest to sytuacja bardzo niekorzystna z punktu widzenia racjonalnych zasad prowadzenia działalności gospodarczej.

5. W przypadku oznaczania wielowymiarowej charakterystyki kopaliny metodą tradycyjną prawdopodobieństwo będące czynnikiem ryzyka wynikającego z niedokładności oszacowania jej charakterystyki jakościowej wzrasta bardzo szybko wraz z liczbą oznaczanych właściwości — według funkcji zbliżonej do wykładniczej, w porównaniu ze znanym prawdopodobieństwem dla danej tolerancji, dotyczącej wyniku oznaczania właściwości wykazującej w kopalinie maksymalną dyspersję.

6. Jeżeli oznacza się jakościowe charakterystyki komponentów kopaliny, wydzielanych z próbki ogólnej, stosując tradycyjną metodę wyznaczania jej wielkości, sytuacja jest znacznie gorsza, ponieważ dla żadnej właściwości żadnego komponentu nie jest znana jej dyspersja w po-

pulacji jednostek losowania, a w konsekwencji — poziom statystycznego przybliżenia oznaczonej charakterystyki jakościowej. Brane pod uwagę przesłanki wskazują, że prawdopodobieństwo błędnej oceny jakości komponentów kopaliny jest wysokie.

7. Niezbędnym warunkiem zmniejszenia prawdopodobieństwa błędu oszacowania jakościowych charakterystyk kopaliny, a co za tym idzie — zmniejszenia ryzyka ponoszenia strat finansowych na skutek podjęcia decyzji o zakwalifikowaniu kopaliny do konkretnej kategorii jakościowej, opierających się na zbyt mało dokładnych danych, jest zastosowanie właściwego wariantu metody estymacji wielowymiarowo-wektorowej przy wyznaczaniu wielkości próbek ogólnej kopaliny.

8. Ponoszone straty finansowe są malejącą funkcją poziomu dokładności estymacyjnej, podczas gdy koszty badań są jego rosnącą funkcją. W związku z tym, najkorzystniejszy ekonomicznie będzie taki poziom dokładności, przy którym suma wspomnianych strat i wydatków na badania osiągnie minimum.

9. Zamieszczone przykłady świadczą, że posługując się obecną techniką obliczeniową, nie jest trudne zastosowanie do obliczeń wielkości próbek ogólnych, metody — wielowymiarowej i wektorowej — estymacji zestawień parametrów, które charakteryzują jakość kopaliny, a w rezultacie zmniejszenie ryzyka błędu oszacowania ich właściwości, skutkującego za mało precyzyjnym ustaleniem ich kategorii jakościowej. Jednakże potrzebna jest w tym celu znajomość przybliżonych statystycznych charakterystyk próbek pierwotnych badanych produktów. Dla danych warunków naturalnych i produkcyjnych można te charakterystyki określić za pomocą odpowiednio wykonanych badań i zorganizować w tym zakresie banki informacji, stanowiące bazę dla szerokiego stosowania metod estymacji wielowymiarowej i wektorowej.

LITERATURA

- Dziura M., 1994 — Ryzyko i niepewność w podejmowaniu decyzji. Zesz. Nauk. AE, Katowice.
- Gould G.B., 1938 — Statistical Interpretation of Laboratory Coal Test and Sampling Methods. Fuel nr 3.
- Grzybowski W., 1994 — Przedsiębiorczość i ryzyko w gospodarce rynkowej. Zesz. Nauk. Uniwersytetu M. Curie-Skłodowskiej, Lublin.
- Hassialis M.D., 1945 — Sampling and Testing. Taggart's Handbook of Mineral Dressing. Ed. J. Wiley and Sons, New York.
- Hellwig Z., 1987 — Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa.
- Kozin V.Z., 1981 — Minimalnaja massa proby i koliczestwo czastnych prob pri oprobowanii nicodnorodnogo massiva. Izwiestia vuzov, Gornyj žurnal No 2.
- Krasnow D.A., 1969 — Tiorietičeskie osnowy i rascziotnyje formuly opriedielnija viesia prob. Izd. Niedra, Moskwa.
- Łokonow M.F., 1961 — Oprobowanije na obogatitielnych fabrikach. Gosgortičchizdat, Moskwa.
- Mielecki T., 1971 — Wiadomości o własnościach i badaniu węgla. Wyd. Śląsk, Katowice.
- Malina A., Pawełek B., Wanat S., Zeliaś A., 1998 — Statystyczne metody oceny ryzyka w działalności gospodarczej. Zesz. Nauk. AE, Kraków.
- Martyniak J., 1994 — Miarodajność charakterystyk węgla w świetle analizy wielowymiarowej i wektorowej. Prace Nauk. GIG nr 790.
- Martyniak J., 1994 — A Multidimensional and Multivectorial Criterion of Representativeness for Preparation Properties of Coal. Gosp. Sur. Min. t. 10, z. 2.
- Martyniak J., 1994 — A Method to Assess the Reliability of Coal preparation Parameters Characterizing a Collected Sample. Gosp. Sur. Min. t. 10, z. 4.

- Martyniak J., 1997 — Podstawy i przykłady szacowania mierników reprezentatywności próbek ogólnych węgla. Przegląd Górniczy nr 6.
- Pawłowski Z., 1972 — Wstęp do statystycznej metody reprezentacyjnej. PWN, Warszawa.
- Resler J., Riedl R., 1972 — O granulometrickm sloeni uhli a vzorkovni pro obecny rozbor a tidici zkoukou. Sbornik, Vysoke koly chemicko-technologické v Praze, Technologie paliv, Praha.
- Sommer O., 1966—1969 — Anwendung mathematisch-statistischer Methoden zur Beurteilung von Aufbereitungsmaschinen und vorgängen. I 7 Teil Aufbereitungs Technik nr 11/1966, nr 3/1967, nr 1; 6/1968, nr 11; 12/1969.
- Steczowski J., 1988 — Zastosowanie metody reprezentacyjnej w badaniach społeczno-ekonomicznych. PWN, Warszawa.
- Studzinski R., 1994 — Szacowanie i ograniczanie ryzyka. Atest — Ochrona Pracy nr 6.
- Tomlinson R.C., 1953 — The Routine Sampling of Coal. Journal of the Institute of Fuel, no 151.

JERZY MARTYNIAK

**THE CONDITION FOR DECREASING OF RISK CONSEQUENT ON THE ERROR OF ESTIMATION THE QUALITY PARAMETERS
DECISIVE WHAT IS THE QUALITY CLASS ASSIGNED TO A MINERAL LOT**

Key words

Economy, minerals, quality evaluation, decision risk, sample representativeness

Abstract

In this paper there is characterized the influence of closeness of mineral quality estimation over the risk of suffering a financial loss. This loss is caused by the decision based on the quality evaluation of a mineral lot according to the received determination results. There is paid attention to the importance of likelihood that the real quality parameters of mineral lot are found out the utmost of the permissible tolerance for determination results. This likelihood is a essential factor for the sayed risk and is directly formed by the probability that the real quality parameters are found inside the spaces corresponding to the established estimation tolerances. The forming probability is called the confidence level and in common with these spaces termed the confidence intervals, are the criterion for assessment of statistical closeness pertaining to the mineral lot multidimensional quality. This closeness is consequent upon the estimation method used. The traditional method is not agreed with the principles of the representativeness method. The practiced estimation is onedimensional while majority of mineral qualities are multidimensional and/or multivectorial. There is broached the uncertainly arising at when the traditional method is applied to determinate a multidimensional and/or multivectorial mineral quality. In the case of arriving at the decision concerns a mineral quality class on the basis of the results represented the mineral quality obtained by the traditional method, it has proved that the uncertainly very increases. The decision risk follows this method is adequately increased. The risk of decision based on the quality evaluation, can be decreased to the desirable level on condition of using the fit variant of the multidimensional-multivectorial method for mineral quality estimation. Then the decisions assign the mineral qualities pointed out by determination results, as real, will be correct.