

MARIUSZ KRZAK*

Możliwe wykorzystania teorii gier w podejmowaniu decyzji w górnictwie

Słowa kluczowe

Gra, strategia, decyzja, badania operacyjne, analiza Monte Carlo

Streszczenie

W artykule zaprezentowano założenia teorii gier. Na przykładach zdefiniowano rodzaje gier oraz przedstawiono metodykę ich rozwiązywania. Praktyczne zastosowanie teorii gier w górnictwie zaprezentowano na przykładzie Rejonu Głównego kopalni rud Cu-Ag Rudna. Uzyskane wyniki skonfrontowano z rezultatami symulacji Monte Carlo.

Wprowadzenie

Nowoczesne zarządzanie i kierowanie przedsiębiorstwami oparte jest na rachunku ekonomicznym i metodach matematycznych. Historia naukowego opracowania metod znajdowania optymalnych decyzji sięga połowy lat czterdziestych minionego stulecia. Współcześnie, podejmując decyzje dysponujemy rozbudowanym aparatem matematycznym, którego celem jest stworzenie naukowych podstaw optymalizacji decyzji.

Decyzją jest możliwość wyboru jednego z alternatywnych sposobów działania. Problemem jest zdefiniowanie, co rozumiemy pod pojęciem decyzji optymalnej? Czy decyzja optymalna jest rzeczywiście najlepsza? Optymalna decyzja nie zawsze musi być najlepszą. Jest mało prawdopodobne, by udało się zdefiniować kiedy i jaka decyzja w danej sytuacji jest najlepsza.

* Dr inż., Wydział Geologii, Geofizyki i Ochrony Środowiska AGH, al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków;
e-mail: krzak@uci.agh.edu.pl

Efektom naszego działania ma być osiągnięcie jednego lub więcej celów. Środki którymi dysponujemy można zainwestować wielorako i od nas samych zależy jak to uczynimy. Aby można było podjąć dobrą decyzję należy przyjąć kryterium oceniające skutki podjętej takiej czy innej decyzji. Kryterium takim może być maksymalizacja zysku, minimalizacja kosztów i wiele innych. Podjęcie decyzji poprzedzone jest więc wieloetapową procedurą, która zostanie przybliżona w dalszej części tego przeglądowego artykułu. „Zdrowy rozsądek” jest potrzebny do oceny, czy modele matematyczne dają wiarygodne wyniki.

Są decyzje łatwe i trudne, niezagrozone i ryzykowne. Decyzje zależą od okoliczności ich podejmowania. Wyróżnia się tu warunki:

- pewności (zdeterminowane),
- ryzyka,
- niepewności,
- konfliktu.

Pewność to sytuacja, gdy podjętemu działaniu (decyzji) odpowiada niezmiennie ten sam rezultat. Wyobraźmy sobie sytuację losowania kulki ze zbioru zawierającego tylko białe kulki. Wynikiem losowania zawsze będzie kulka biała. W geologii taka sytuacja może odpowiadać np. poszukiwaniu złóż węglowodorów w niezwiertzałym masywie skał metamorficznych lub magmowych. Wynik tej konfrontacji jest z góry oczywisty i będzie równoznaczny z niepowodzeniem poszukiwawczym.

Z ryzykiem, czyli mierzalną niepewnością (Winpenny 1995) mamy do czynienia, gdy podjęte działanie prowadzi do kilku (przynajmniej dwóch) wykluczających się wzajemnie wyników, z których każdy ma przypisane prawdopodobieństwo. Obrazuje to sytuacja jednokrotnego losowania kulki z puli, w której jest jednakowa ilość kulek białych i czarnych. Możemy wylosować białą lub czarną z jednakowym prawdopodobieństwem wynoszącym 50%. Na polu geologii sytuacji tej odpowiada np. rezultat poszukiwania złoża. Wyniki rzeczowe prac poszukiwawczych są dwa: znalezienie lub nieznanie złoża, ale tu prawdopodobieństwo obu zdarzeń nie musi być wcale jednakowe.

Niepewność ma miejsce wtedy, gdy nie potrafimy przewidzieć wyników rzeczowych podjętych decyzji oraz określić ich prawdopodobieństwa (Łucki 1995). Czasami wręcz mówienie o prawdopodobieństwie jest pozbawione sensu. Kontynuując przykład z kulkami w puli — jeśli nie znamy kolorów kulek i ich ilości, nie potrafimy odpowiedzieć ani jaką kulkę wylosujemy, ani tym bardziej podać prawdopodobieństwa, że będzie to np. kulka zielona. W realiach geologicznych niepewnością obarczone są np. wielkość zasobów bilansowych odkrytego złoża, jakość kopaliny, warunki geologiczno-górnictwa eksploatacji itp.

Warunki konfliktu istnieją, gdy współzawodniczymy z **Myślącym Przeciwnikiem**. W przypadku gier z Naturą ten przypadek nie będzie miał miejsca. Nie traktujemy Natury jako rywala i trudno ją podejrzewać o celową złośliwość w stosunku do nas.

Inną klasyfikacją decyzji jest podział ze względu na możliwość ich realizacji (Łucki 2001). Wyróżnia się tutaj:

- decyzje dopuszczalne oraz
- decyzje niedopuszczalne.

Decyzja dopuszczalna to taka, która nadaje się do realizacji, natomiast decyzja niedopuszczalna jest decyzją niemożliwą do wykonania ze względów technicznych lub finansowych.

Dalszy podział decyzji dopuszczalnych prowadzi do wydzielenia decyzji: optymalnych i nieoptymalnych. Decyzja optymalna zapewnia uzyskanie największego możliwego efektu stosowanie do zaangażowanych środków bądź uzyskania oczekiwanego efektu przy najmniejszym możliwym zużyciu środków. Decyzja nieoptymalna prowadzi do uzyskania gorszego efektu lub większego wydatkowania środków. Łucki (2001) podaje następujące przykłady obrazujące poszczególne decyzje:

- decyzja niedopuszczalna: podjęcie działalności gospodarczej, w której wymagane nakłady inwestycyjne przewyższają zgromadzone środki finansowe,
- decyzja optymalna: wydatkowanie 250 mln zł na taką działalność gospodarczą, która zapewnia zysk w wysokości 600 mln zł, gdy wszystkie inne możliwe lokaty posiadanego kapitału (250 mln zł) nie dają takiego efektu finansowego,
- decyzja nieoptymalna: wydatkowanie kwoty 250 mln zł na pewną działalność gospodarczą przynoszącą zysk równy 50 mln zł w sytuacji, gdy jest wiele innych okazji do lepszego zainwestowania kapitału.

1. Podstawy teorii gier

Teoria gier to dział matematyki zajmujący się badaniem optymalnego zachowania w przypadku konfliktu interesów. Teoria gier wywodzi się z badania gier hazardowych i stąd pochodzi też jej terminologia. Główne zastosowanie znajduje jednak w ekonomii, biologii, wojskowości oraz informatyce. Podjęto próby zastosowania teorii gier w innych dziedzinach, także w górnictwie (np. Potocki, Przybyła 1980; Kowalik 1994, 1997).

Gra w języku potocznym jest rodzajem zabawy, która ma cel głównie rozrywkowy. W naszym rozumieniu **grą** będzie dowolna sytuacja konfliktowa, a **graczem** dowolny jej uczestnik. Uczestnikiem tym może być inny człowiek, konkurencyjne przedsiębiorstwo, obca armia czy Natura. Wszystkich uczestników gry, poza Naturą, możemy traktować w kategorii myślących oponentów, podczas gdy Natura będzie biernym, choć bardzo wymagającym graczem. Każda strona wybiera pewną **strategię** postępowania, po czym — zależnie od strategii własnej oraz innych uczestników — każdy gracz otrzymuje wypłatę w jednostkach użyteczności. Zależnie od gry, jednostki użyteczności mogą reprezentować np.: pieniądze, wzrost szansy na przekazanie własnych genów czy też cokolwiek innego, z czystą satysfakcją włącznie. Wynikowi gry zwykle przyporządkowuje się pewną wartość liczbową. Teoria gier bada więc strategie, jakie powinni wybrać gracze, żeby osiągnąć najlepsze wyniki. Stosuje się ją w celu wyboru optymalnej decyzji (rozwiązania) z uwzględnieniem ryzyka, na jakie narażony jest podejmujący decyzję. Ważne jest prawidłowe określenie poziomu ryzyka. O znaczeniu teorii gier w działalności operacyjnej, rozwiązywaniu konfliktów itp., niech świadczy fakt, że wybitni badacze tej problematyki: J.F. Nash, J.C. Harsanyi i R. Selten, otrzymali w 1994 roku Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii.

Gra jest sytuacją konfliktową. Konflikt interesów zachodzi nie tylko wtedy, gdy interesy graczy są całkowicie przeciwstawne, ale także wtedy, gdy są one tylko częściowo niezgodne. W pierwszym przypadku mówimy o grze z tzw. **sumą zerową**, w drugim o grze z **sumą niezerową** (Kofler 1963; Owen 1975). Gra może zachodzić pomiędzy dwoma uczestnikami

bądź większą ich liczbą. Wyróżnia się zatem gry **dwu- lub n-osobowe**. Szczególnym przypadkiem gier dwuosobowych jest tzw. gra z Naturą. Ze względu na przepływ informacji pomiędzy graczami, gry dzieli się na **kooperatywne** (uczestnicy porozumiewają się ze sobą) i **niekooperatywne** (nie porozumiewają się ze sobą). Wśród niekooperatywnych szczególną klasę stanowią gry o niekompletnej informacji (uczestnicy nie są wzajemnie pewni realizowanego przez przeciwnika celu). Istnieją ponadto dalsze rodzaje gier, tj.: gry o nieskończonej liczbie strategii, rekursywne, gry o przeżycie, koalicyjne itd.

2. Terminologia gier

Poniżej na przykładach wyjaśniono zasadniczą terminologię gier. Wyobraźmy sobie grę dwóch graczy oznaczonych I i II. Każdy z nich ma do dyspozycji dwie strategie: gracz I dysponuje strategiami α_1 i α_2 , gracz II natomiast strategiami β_1 i β_2 . Macierz wypłat (macierz użyteczności lub macierz gry), czyli kwoty otrzymywane przez poszczególnych graczy reprezentuje tablica prostokątna liczb:

$$\begin{array}{cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \begin{pmatrix} -1 & 0 \end{pmatrix} \\ \alpha_2 & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (1)$$

Każdy element tej macierzy oznacza wielkość wypłaty jaką otrzymuje gracz nr I od gracza nr II, w zależności od wybranej przez niego (bez wiedzy gracza II) strategii. Element ujemny wskazuje oczywiście na to, że gracz I wypłaca graczowi II odpowiednią kwotę. Dysponując macierzą gry dla gracza I, można bez trudności ułożyć odpowiednią macierz wypłat dla gracza II. Wystarczy tylko w elementach powyższej macierzy (1) pozamieniać znaki na przeciwne. Otrzymujemy wtedy:

$$\begin{array}{cc} & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \beta_2 & \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \quad (2)$$

Dodając do siebie odpowiednie elementy obu macierzy wypłat otrzymamy zawsze zero. Gry w których suma wypłat dla obu partnerów przy każdej parze ich strategii wynosi zero nazywane są w teorii gier, jak wspomniano, grami zerowymi. Inaczej mówiąc liczba $\alpha_1\beta_1$ oznacza jednocześnie wielkość wygranej gracza I i wielkość przegranej gracza II (Ignasiak 1996). Ten typ gry jest szczególnym przypadkiem gier o stałej sumie wypłat. Tendencje graczy są przeciwstawne, każdy dąży do maksymalizacji wypłaty, podczas gdy przeciwnicy dążą do jej minimalizacji. Są to tzw. gry **kontrowersyjne**. Ogólny schemat gry zerowej można zapisać:

$$\begin{array}{c} \beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \dots \quad \beta_n \\ \alpha_1 \quad \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{array} \right) \end{array} \quad (3)$$

Gdy gracz I wybiera strategię α_i , gracz II zaś β_k , wtedy gracz II wypłaca graczowi I wygraną w wysokości a_{ik} ($i = 1, 2, 3, \dots, m; k = 1, 2, 3, \dots, n$). Kontrowersyjność gry wynika z faktu, że $a_{ik} + (-a_{ik}) = 0$ ($i = 1, \dots, m; k = 1, \dots, n$).

Analizując przykład (1) stwierdzamy, że istnieją ściśle określone (optymalne) strategie gry obu partnerów. Dla gracza I optymalną strategią jest strategia α_2 , w której w najgorszym przypadku, niezależnie od decyzji gracza II nic nie straci. Z punktu widzenia gracza II optymalną strategią jest strategia β_1 . Jeżeli obaj gracze znają teorię gier, gra zakończy się bez wygranej w przecięciu $\alpha_2\beta_1$. Nie zajdzie również żadna zmiana w sposobie gry obu graczy, gdy gra powtórzy się wielokrotnie. Wtedy, przy opisanym sposobie gry, gracze będą bez przegranej, podczas gdy w każdym innym sposobie (strategii) gry zachodzi ryzyko poniesienia straty. Jest to niestety dość rzadki przypadek gier, gdzie dobór strategii jest oczywisty. W większości przypadków gry są znacznie bardziej skomplikowane. Uzyskana w przykładzie wielkość „0”, będąca rozwiązaniem macierzy gry, nazywana jest **wartością gry (ceną gry)**. Wartość gry jest średnią kwotą przypadającą na partię, którą wygrałby w długim okresie jeden z graczy, gdyby obaj stosowali swe najlepsze strategie (Stach-Janias 2001), przy czym obaj są zainteresowani, aby nie zmieniać swoich decyzji. Wartość gry jest zatem punktem równowagi, w której gracz I realizuje swoją możliwie największą wygraną przy decyzji α_m (dolna wartość gry), podczas gdy gracz II realizuje swoją najmniejszą stratę podejmując decyzję β_n (górną wartość gry). Punkt ten nazywany jest niekiedy **punktem siodłowym** (maxmin-minmax). W sytuacji gdy górna wartość gry równa się dolnej wartości gry mówimy o grach zamkniętych. W przypadku różnych górnych i dolnych wartości gry mówimy o grach otwartych (Steinhaus 1958). Gry otwarte nie posiadają punktu siodłowego.

Poniżej przedstawiono przykład rozwiązania gry otwartej. Ponownie wyobraźmy sobie grę dwóch graczy oznaczonych I i II. Każdy z nich ma do dyspozycji dwie strategie. Macierz wypłat wygląda jak poniżej:

$$\begin{array}{c} \beta_1 \quad \beta_2 \\ \alpha_1 \quad \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{array} \right) \\ \alpha_2 \end{array} \quad (4)$$

W tej grze trudno jest wskazać optymalne strategie. W trakcie wielokrotnego powtarzania gry partnerzy są zmuszeni ciągle zmieniać strategię, brak jest tu pary stanowiącej punkt równowagi. Gracz I wybierze raczej strategię α_1 , gdyż w najgorszym przypadku nic nie straci, podczas gdy w strategii α_2 naraża się na stratę „-1”. Partner II raczej wybierze strategię β_2 .

Wprawdzie w obu przypadkach jest on narażony na stratę 1, ale przy wyborze strategii β_2 ma możliwość wygrania 1, podczas gdy w strategii β_1 możliwości tej nie ma. W przypadku jednokrotnej gry partnerzy postąpią prawdopodobnie w ten sposób. Przyjmijmy jednak, że gra powtarza się wielokrotnie. Partner II, wyraźnie pokrzywdzony, dojdzie do wniosku, że przy ustalonym wyborze gracza I (strategia α_1) osiągnie więcej wybierając β_1 . W odpowiedzi na to gracz I zmieni strategię na α_2 , zmuszając ponownie do zmiany decyzji gracza II na strategię β_2 . Ten sposób postępowania można prowadzić w nieskończoność, jednakże częstotliwość powtarzania decyzji przez obu graczy w postępowaniu optymalnym jest ściśle określona.

Jak pokazano powyżej, gry otwarte nie posiadają punktu siodłowego, a więc punktu równowagi. Tym samym nie istnieją oczywiste strategie optymalne. Można jedynie wyznaczyć strategię gracza I — która gwarantuje mu zysk wynoszący przynajmniej V_1 (dolna cena gry) i stanowi tzw. strategię maksymimalną (maksymin), bądź strategię gracza II — która gwarantuje mu stratę wynoszącą najwyżej V_2 (górną cenę gry) i nazywana jest strategią minimalną (minimaks).

3. Zastosowanie w górnictwie

Wykorzystanie i metodykę rozwiązania tego typu gier w górnictwie podaje Kowalik (1997). Posłużmy się przytoczonym przezeń przykładem. Kopalnia ma wykonać otwór w ścianie w pewnym miejscu X_i ($i = 1, \dots, 8$). Podczas wiercenia możliwe jest wystąpienie niebezpieczeństw w postaci: 1 — wyrzutów gazów, 2 — wyrzutów skał, 3 — wypyływu kurzawki, 4 — wypyływu wody, 5 — obrywu niezabezpieczonego ociosu lub stropu, 6 — obrywu skał z calizny, 7 — zagrożenie gazowe CO_2 , 8 — zagrożenie metanowe, 9 — wstrząsy, 10 — tąpnięcia. Niebezpieczeństwa są oczywiście strategiami gry Natury. Stosownie do panujących warunków geologiczno-górnictwowych i poczynionego rozpoznania, macierz gry (5) zawiera prawdopodobieństwa wystąpienia niekorzystnych zjawisk. Im wielkość bliższa 100%, tym ryzyko zaistnienia niebezpieczeństwa jest mniejsze. Kryterium wyboru optymalnego miejsca wiercenia otworu będzie zatem bezpieczeństwo pracujących górników.

Kopalnia	Natura										(5)
	β_1	β_2	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9	β_{10}	
α_1	99	96	100	93	94	92	100	91	93	100	
α_2	88	100	96	85	91	96	90	100	99	87	
α_3	95	93	97	94	93	94	98	95	92	96	
α_4	100	98	96	97	95	100	98	96	100	99	
α_5	95	97	88	92	90	99	89	96	100	95	
α_6	91	100	98	92	92	98	90	100	99	92	
α_7	100	98	100	95	94	94	100	96	95	100	
α_8	87	97	95	96	91	100	95	95	98	99	

Macierz powyższą rozwiązać można na kilka sposobów. W książce (Kowalik 1997) zaprezentowano rozwiązanie w oparciu o zasadę dominacji. Pewne strategie w macierzy okazują się lepsze od innych i pozwalają osiągnąć wyższy poziom bezpieczeństwa niezależnie od strategii przeciwnika. W analizowanym przykładzie strategia α_4 jest lepsza od α_5 , ponieważ odpowiednie liczby wiersza czwartego macierzy mają zawsze wartości wyższe od wiersza nr 5. Strategia α_4 jest strategią dominującą w stosunku do zdominowanej strategii α_5 . Zapisując zasadę dominacji ogólnie stwierdzamy, że strategia α_x dominuje nad strategią α_y , gdy:

$$\forall w_{xj} \geq w_{yj} \quad (j = 1, \dots, n) \quad (6)$$

Analogicznie wygląda zapis dla gracza II (w naszym przypadku Natury). Zasada dominacji pozwala upraszczać gry przez eliminację tych strategii, które nie będą używane.

Wracając do przykładu stwierdzamy, że:

- strategia α_4 dominuje nad strategią α_5 ,
- strategia α_4 dominuje nad strategią α_8 ,
- strategia α_7 dominuje nad strategią α_1 ,
- strategia α_7 dominuje nad strategią α_2 ,
- strategia α_6 dominuje nad strategią α_3 .

Z punktu widzenia Natury natomiast:

- strategia β_4 dominuje nad strategią β_{10} ,
- strategia β_5 dominuje nad strategią β_2 .

Po wyeliminowaniu strategii zdominowanych macierz przyjmuje postać:

		Natura							
Kopalnia		β_1	β_3	β_4	β_5	β_6	β_7	β_8	β_9
α_4	(100	96	97	95	100	98	96	100
α_6		91	98	92	92	98	90	100	99
α_7		100	100	95	94	94	100	96	95

W obecnej sytuacji kopalnia nie posiada strategii dominujących, Natura natomiast dysponuje następującymi strategiami dominującymi i zdominowanymi:

- strategia β_4 dominuje nad strategią β_9 ,
- strategia β_5 dominuje nad strategiami β_3 , β_4 , β_6 , β_8 , β_9 ,
- strategia β_6 dominuje nad strategią β_9 ,
- strategia β_7 dominuje nad strategią β_1 .

Eliminując ponownie strategie zdominowane otrzymujemy macierz:

		Natura	
Kopalnia		β_5	β_7
α_4	(95	98
α_6		92	90
α_7		94	100

W zredukowanej macierzy stwierdzamy, że Natura nie posiada strategii dominujących, w przypadku kopalni natomiast:

- strategia α_4 dominuje nad strategią α_6 ,
- strategia α_7 dominuje nad strategią α_6 .

Eliminując drugi wiersz pozostaje macierz:

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Natura} \\
 \text{Kopalnia} & \beta_5 \quad \beta_7 \\
 \alpha_4 & (95 \quad 98) \\
 \alpha_7 & (94 \quad 100)
 \end{array} \quad (9)$$

W kolejnym kroku zauważamy, że strategia β_5 dominuje nad strategią β_7 . Po eliminacji strategii β_7 macierz ma postać:

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Natura} \\
 \text{Kopalnia} & \beta_5 \\
 \alpha_4 & (95) \\
 \alpha_7 & (94)
 \end{array} \quad (10)$$

W ostatnim kroku z kolei strategia α_4 dominuje nad strategią α_5 i ostatecznie otrzymujemy macierz będącą rozwiązaniem gry:

$$\begin{array}{cc}
 & \text{Natura} \\
 \text{Kopalnia} & \beta_5 \\
 \alpha_4 & (95)
 \end{array} \quad (11)$$

Optymalną decyzją dla kopalni zapewniającą maksymalne bezpieczeństwo górnikom będzie przyjęcie strategii α_4 . W tej grze Natura może nie zastosować optymalnej dla siebie strategii (β_5), ponieważ nie zna zasad teorii gier i nie rozumuje tak jak człowiek. Może się zdarzyć, że uzyskamy poziom bezpieczeństwa wynoszący 100%. Gdyby Natura potrafiła rozmawiać kategoriami ludzkimi w oparciu o teorię gier, wybrałaby niewątpliwie strategię β_5 , lecz „wybierając” inną zapewnia kopalni wyższy poziom bezpieczeństwa.

Omawiane powyżej strategie nazywane są strategiami **czystymi**. Oprócz nich wyróżnia się tzw. strategie **mieszane**. Strategie mieszane są mieszanką strategii czystych taką, że strategie $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ są stosowane z prawdopodobieństwami p_1, \dots, p_m , przy czym $p_i \geq 0$ (dla $i = 1, \dots, m$)

oraz $\sum_{i=1}^m p_i = 1$

Taką strategię zapisuje się w postaci: $(p_1\alpha_1, p_2\alpha_2, \dots, p_m\alpha_m)$ (Kowalik 1997). Interpretacja optymalnych strategii mieszanych może być udziałowa bądź częstościowa. W pierwszym przypadku rozwiązaniem gry jest optymalny podział np. inwestowanych pieniędzy. W drugim przypadku określona jest częstotliwość stosowania danych strategii w grach powtarzanych wielokrotnie. W przypadku gier z Naturą stosuje się częściej interpretację udziałową. Sytuację gry mieszanej i interpretację jej wyników obrazuje poniższy przykład.

Gracz I (np. inwestor górniczy) ma możliwość zainwestowania swego kapitału w dwa obiekty złożowe α_1 i α_2 . Przychody z inwestycji zależą od zaistniałych warunków geologiczno-górnicych eksploatacji β_1 i β_2 . Przedstawia je następująca macierz:

$$\begin{array}{cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \left(\begin{array}{cc} 40 & 20 \end{array} \right) \\ \alpha_2 & \left(\begin{array}{cc} 15 & 30 \end{array} \right) \end{array} \quad (12)$$

W tej grze rywalem decydenta jest Natura, która może stworzyć warunki β_1 lub β_2 . Grę tę trudno uznać za kontrowersyjną, gdyż ciężko posądzać Naturę, by stworzyła decydentowi możliwie najgorsze warunki inwestycji. Natura zachowa się pasywnie, niemniej decydent chcąc inwestować swój kapitał bezpiecznie musi traktować Naturę jako rywala o cechach kontrowersyjnych. Z macierzy wynika, że decyzja α_1 jest lepsza aniżeli α_2 . W pierwszym przypadku inwestor zyskuje co najmniej 20, podczas gdy w drugim co najmniej 15 jednostek. Załóżmy dodatkowo, że podejmujący decyzję ma prawo (dysponuje własnym kapitałem) i może podzielić kapitał, angażując go częściowo w inwestycję α_1 i częściowo w inwestycję α_2 , uzyskując przychody proporcjonalne do wkładu w poszczególne obiekty złożowe. Jeśli zdecyduje się podzielić kapitał po równo, to uzyska przychody:

- w przypadku (geologiczno-górnicych warunków eksploatacji) β_1 : $\frac{1}{2} \cdot 40 + \frac{1}{2} \cdot 15 = 27,5$
- w przypadku (geologiczno-górnicych warunków eksploatacji) β_2 : $\frac{1}{2} \cdot 20 + \frac{1}{2} \cdot 30 = 25$.

Rodzi się pytanie, czy ten sposób podziału kapitału jest optymalny? Załóżmy, że decydent wkłada x -tą część swego kapitału w złożo α_1 , a pozostałą, czyli $(1-x)$ w złożo α_2 . Wielkość „ x ” spełnia nierówność $0 \leq x \leq 1$.

W warunkach β_1 uzyska przychód:

$$40x + 15(1-x) = 25x + 15,$$

— w warunkach β_2 natomiast:

$$20x + 30(1-x) = -10x + 30$$

Zgodnie z teorią gier optymalna wartość x wyliczana jest z porównania obydwu równań (dowód tego twierdzenia wykracza poza ramy tego artykułu). Otrzymujemy więc:

$$25x + 15 = -10x + 30$$

$$x = \frac{3}{7}$$

W interpretacji udziałowej najmniej ryzykownym sposobem inwestowania kapitału dla rozważanego decydenta jest podział kapitału w stosunku $\frac{3}{7}$ dla złoza α_1 i $\frac{4}{7}$ dla złoza α_2 .

Otrzyma on wtedy następujące przychody:

$$\text{— w warunkach } \beta_1: \frac{3}{7} \cdot 25 + 15 = 25,71$$

$$\text{— w warunkach } \beta_2: \frac{3}{7} \cdot (-10) + 30 = 25,71$$

czyli w najgorszym przypadku osiągnie on przychód 25,71.

Określenie składowych optymalnych strategii mieszanych graczy I i II ujmują poniższe wzory. Przyjmijmy następującą macierz gry:

$$\begin{array}{cc} & \beta_1 & \beta_2 \\ \alpha_1 & \left(\begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \end{array} \right) \\ \alpha_2 & \left(\begin{array}{cc} a_{21} & a_{22} \end{array} \right) \end{array} \quad (13)$$

Prawdopodobieństwa (częstotliwości) p_1 i p_2 użycia strategii czystych α_1 i α_2 wynoszą:

$$p_1 = \frac{|w_{21} - w_{22}|}{|w_{11} - w_{12}| + |w_{21} - w_{22}|} \quad (14)$$

$$p_2 = \frac{|w_{11} - w_{12}|}{|w_{11} - w_{12}| + |w_{21} - w_{22}|} \quad (15)$$

Prawdopodobieństwa (częstotliwości) q_1 i q_2 użycia strategii czystych β_1 i β_2 można wyliczyć ze wzorów:

$$q_1 = \frac{|w_{12} - w_{22}|}{|w_{11} - w_{21}| + |w_{12} - w_{22}|} \quad (16)$$

$$q_2 = \frac{|w_{11} - w_{21}|}{|w_{11} - w_{21}| + |w_{12} - w_{22}|} \quad (17)$$

Gdy gra nie posiada punktu siodłowego, a rozgrywana jest tylko jeden raz i nie da się do niej zastosować interpretacji częstościowej ani udziałowej, stosuje się w takiej sytuacji strategię bezpieczną, np. maksyminową wyznaczoną na podstawie macierzy gry (Kowalik 1997).

Wykorzystanie teorii gier do podejmowania decyzji przedstawiono na przykładzie wyboru kolejności eksploatacji oddziałów w Rejonie Głównym złoża rud Cu-Ag kopalni Rudna. Obecnie oraz w ciągu najbliższych kilku lat eksploatowane będą oddziały: G-1, G-3, G-4, G-6, G-7, G-8 w rejonie Głównym; G-11, G-12, G-13, G-15 w rejonie Zachodnim oraz G-21, G-22, G-23, G-24 w rejonie Północnym. Rudy z czynnych pól górniczych kopalni Rudna charakteryzują się bardzo dobrymi wskaźnikami wzbogacania. Są to w przewadze rudy piaszczowcowe o drobnoziarnistej strukturze minerałów siarczkowych, występujących w kruchym spoiwie, a więc łatwej separacji i kontrastowo dobrej flotowalności w stosunku do masy płonnej. Dla poszczególnych oddziałów ZG Rudna Główna uzyskano w trakcie badań laboratoryjnych wysokie na ogół wskaźniki wzbogacania (tab. 1).

TABELA 1

Jakość rud z ZG Rudna oraz wskaźniki ich wzbogacania w latach 2001—2007 (wg Wieniewski i in. 1996)

TABLE 1

Quality of ores from the Rudna mine and their enrichment coefficients in the period 2001—2007
(by Wieniewski et. al. 1996)

Oddział	Zaw. Cu w rudzie [%]	Zaw. Cu w koncentr. [%]	Uzysk Cu [%]	Zaw. Ag w rudzie [g/t]	Zaw. Ag w koncentr. [g/t]	Uzysk Ag [%]
G-1	2,69	40,9	91,57	62	930	89,70
G-3	1,38	29,2	89,97	61	1296	89,58
G-4	2,72	31,2	90,44	45	495	85,07
G-6	2,54	60,1	89,39	20	441	82,04
G-7	3,39	37,4	87,76	43	464	84,89
G-8	1,64	64,8	91,60	26	940	83,25
Rudna Główna	2,46	41,2	90,06	43	698	86,96

Wykorzystując metodę symulacyjną Monte Carlo (MC) oszacowano (Krzak 2001, 2002) możliwą do uzyskania wielkość zysku operacyjnego z poszczególnych oddziałów. Najważniejszą korzyścią symulacji było to, że pokazała nie punktową ocenę badanego parametru, lecz zakres możliwych wyników wraz z przypisanym im prawdopodobieństwem. Tak więc w rezultacie symulacji otrzymano rozkłady ocenianych wielkości zysku operacyjnego z poszczególnych oddziałów (tab. 2). Zysk operacyjny stanowi różnicę pomiędzy wartością sprzedaży wyliczoną przy użyciu formuły NSR a kosztami operacyjnymi. Formuła NSR jest powszechnie stosowana do oceny wartości rud i koncentratów metali nieżelaznych (Strzelska-Smakowska 2003). Wielkość zysku operacyjnego może być wskaźnikiem opłacalności produkcji górniczej. Na jego podstawie można wytypować do eksploatacji oddziały zapewniające założony poziom zysku z najwyższym prawdopodobieństwem.

TABELA 2

Statystyki opisowe rozkładów zysku operacyjnego za rudę Rejonu Głównego kopalni Rudna (wg Krzak 2001)

TABLE 2

Basic statistics of operating profit distributions in the Main District of the Rudna mine (by Krzak 2001)

Oddział/rejon	Średnia	Przedział ufności		Odchylenie stand.	Minimum	Maximum	Mediana
		min.	max.				
G-1	18,09	17,87	18,30	4,84	5,57	35,72	17,98
G-3	8,26	8,13	8,40	3,13	-0,28	19,74	8,17
G-4	16,10	15,93	16,28	4,05	6,00	31,00	15,91
G-6	18,38	18,19	18,57	4,27	7,26	33,74	18,21
G-7	18,28	18,11	18,45	3,91	8,13	32,42	18,12
G-8	16,80	16,61	16,98	4,24	5,73	32,09	16,64
Rudna Główna	16,36	16,18	16,54	4,08	5,65	31,16	16,23

Przyjmijmy dla przykładu, że kierownictwo kopalni Rudna zainteresowane jest zyskiem operacyjnym w wysokości co najmniej 15 USD za tonę rudy. Na podstawie np. mediany można stwierdzić, że przynajmniej 50% prawdopodobieństwo tego zysku gwarantują wszystkie oddziały poza oddziałem G-3. Dokładne oszacowania, na podstawie symulacji MC, prawdopodobieństwa uzyskania zysku operacyjnego co najmniej 15 USD/t rudy wyglądają jak poniżej (Krzak 2001, 2002):

- oddział G-1 prawdopodobieństwo 72,10%,
- oddział G-3 prawdopodobieństwo 01,60%,
- oddział G-4 prawdopodobieństwo 59,35%,
- oddział G-6 prawdopodobieństwo 77,40%,
- oddział G-7 prawdopodobieństwo 79,00%,
- oddział G-8 prawdopodobieństwo 64,95%.

Otrzymane rezultaty pozwalają wytypować oddziały „pewne”, które przy założonych parametrach techniczno-ekonomicznych produkcji koncentratów gwarantują wymagany poziom zysku.

Rozważmy teraz grę kopalni wobec parametrów rynkowo-kosztowych. Z jednej strony będą to ceny miedzi i srebra na London Metal Exchange i London Bullion Market, z drugiej koszty operacyjne produkcji koncentratu. Na czynniki rynkowe kopalnia nie ma wpływu, natomiast drugie zależą m. in. od: geologiczno-górnictwowych warunków eksploatacji, odległości oddziałów od szybu, charakterystyki wzbogacalności rudy i in.

Mamy zatem dwóch graczy. Strategiami gracza I — kopalni Rudna — są poszczególne oddziały, a dokładniej możliwe do otrzymania zyski (w USD/t rudy), natomiast strategie gracza II — nazwijmy go Rynek koszty — są przewidywane poziomy cen i kosztów. Dla uproszczenia prezentacji wykorzystania teorii gier założono następujące stany struktury cenowo-kosztowej:

- minimalne ceny metali, minimalne koszty operacyjne oddziałów (W_1),
- minimalne ceny metali, maksymalne koszty operacyjne oddziałów (W_2),
- średnie ceny metali, maksymalne koszty operacyjne oddziałów (W_3),
- średnie ceny metali, minimalne koszty operacyjne oddziałów (W_4).

Przyjęte uproszczenie polega na uwzględnieniu tylko dwóch poziomów cen metali: minimalnego i średniego, wyznaczonych na podstawie prognozy cenowej w pracy Krzaka (2001), ujednoczeniu rozkładu kosztów (tzn. we wszystkich oddziałach są łącznie albo zawsze minimalne albo maksymalne ich poziomy). Zakres kosztów przyjęto w oparciu o dane kosztowe z lat ubiegłych oraz na podstawie prognoz *Mineral Industry Consultants* (MICON 1997). Przy szacowaniu ceny rudy uwzględniono zmiany wielkości opłat hutniczych i rafinacyjnych, stosownie do poziomu cen. Macierz gry przyjmuje zatem postać:

		Rynek koszty				
		W_1	W_2	W_3	W_4	(18)
Kopalnia Rudna	G-1	17,63	14,19	16,76	20,20	(18)
	G-3	07,89	04,71	06,37	09,61	
	G-4	15,75	12,83	14,62	17,74	
	G-6	17,86	14,43	16,65	20,27	
	G-7	17,53	14,59	16,49	19,65	
	G-8	16,79	13,17	15,35	19,17	

Celem gry jest wybór strategii najbezpieczniejszej, przynoszącej najwyższy zysk kopalni, zależnie od zaistniałych warunków cenowych i kosztowych.

Przyjrzyjmy się rozwiązaniu tej gry dwoma sposobami.

1. Wybieramy najmniejsze wartości z każdego wiersza macierzy, w celu wyznaczenia dolnej ceny gry:

$$V_1 = \max (14,19; 4,71; 12,83; 14,43; 14,59; 13,17)$$

Wartość maksymalna z powyższego zbioru jest dolną ceną gry i wynosi 14,59.

Wyznaczenie górnej ceny gry polega na znalezieniu minimalnej wartości spośród maksymalnych wielkości z każdej kolumny macierzy:

$$V_2 = \min (17,86; 14,59; 16,76; 20,20).$$

Wartość 14,59 jest górną ceną gry. Dodatkowo $V_1 = V_2$ i gra posiada punkt siodłowy (zaznaczony ramką w macierzy). Zatem najbezpieczniejszym finansowo oddziałem do eksploatacji jest oddział G-7. Eksploatacja oddziału zapewni nam zysk nie mniejszy niż 14,59 USD/t rudy. Strategia ta nazywana jest w teorii gier strategią maksyminową.

2. Poniżej przedstawiono sposób rozwiązania gry z wykorzystaniem zasady dominacji. Z punktu widzenia kopalni zauważamy, że:

- strategia G-1 dominuje nad strategią G-3,
- strategia G-1 dominuje nad strategią G-4,
- strategia G-1 dominuje nad strategią G-8.

Po wyeliminowaniu strategii zdominowanych uzyskujemy macierz:

$$\begin{array}{c}
 \text{Rynek koszty} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \text{Kopalnia} \\
 \text{Rudna}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{G-1} \\
 \text{G-6} \\
 \text{G-7}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 W_1 & W_2 & W_3 & W_4 \\
 17,63 & 14,19 & 16,76 & 20,20 \\
 17,86 & 14,43 & 16,65 & 20,27 \\
 17,53 & 14,59 & 16,49 & 19,65
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad (19)$$

W kolejnym kroku stwierdzamy, z punktu widzenia gracza Rynek koszty, że:

- strategia W_4 jest zdominowana przez strategię W_1 ,
- strategia W_1 jest zdominowana przez strategię W_2 ,
- strategia W_3 jest zdominowana przez strategię W_2 .

Wykluczając odpowiednie kolumny otrzymujemy:

$$\begin{array}{c}
 \text{Rynek koszty} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \text{Kopalnia} \\
 \text{Rudna}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \text{G-1} \\
 \text{G-6} \\
 \text{G-7}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 W_2 \\
 14,19 \\
 14,43 \\
 14,59
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad (20)$$

Teraz z kolei:

- strategia G-1 jest zdominowana przez G-6,
- strategia G-6 jest zdominowana przez G-7.

Po ostatecznym zredukowaniu macierzy dysponujemy nową macierzą:

$$\begin{array}{c}
 \text{Rynek koszty} \\
 \\
 \begin{array}{c}
 \text{Kopalnia} \\
 \text{Rudna}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \\
 \text{G-7}
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 W_2 \\
 (14,59)
 \end{pmatrix}
 \end{array}
 \quad (21)$$

Uzyskaliśmy wynik identyczny jak w metodzie 1.

W dalszym postępowaniu wyznaczano kolejne z pozostałych, optymalne z punktu widzenia maksymalizacji zysku oddziały, stosując analogiczne jak powyżej kryteria. Macierz gry miała

z każdym krokiem o jeden wiersz mniej, co wynikało z pominięcia oddziału będącego rozwiązaniem poprzedzającego etapu gry. Nie przytaczając konkretnych macierzy otrzymano następujący ranking opłacalności eksploatacji oddziałów (według malejącego poziomu zysku):

- oddział G-6, punkt siodłowy 14,43 (USD/t rudy),
- oddział G-1, punkt siodłowy 14,19 (USD/t rudy),
- oddział G-8, punkt siodłowy 13,17 (USD/t rudy),
- oddział G-4, punkt siodłowy 12,83 (USD/t rudy),
- oddział G-3, minimalny poziom zysku 4,71 USD/t rudy.

Podane wielkości punktu siodłowego określają minimalny poziom zysku.

Rozwiązanie gry, ustalające kolejność i opłacalność eksploatacji z poszczególnych oddziałów, potwierdza wyniki uzyskane przy symulacji Monte Carlo. Decydent podejmuje więc decyzje dysponując kompletnym modelem informacji, zapewniającym optymalne wyniki finansowe.

Zakończenie

Stosowanie odpowiednich strategii minimalizuje ryzyko działania. Teoria gier, w połączeniu np. z symulacją Monte Carlo, pozwala określić prawdopodobieństwa wystąpienia pewnych zdarzeń i dopasować posunięcia (strategie), stosowne do sytuacji. W artykule zasygnalizowano jedynie kilka możliwości wykorzystania teorii gier. Istnieje cały szereg specyficznych metod rozwiązywania sytuacji konfliktowych w przypadku gier z Naturą. Wyróżnia się tu kryteria Walda, Hurwicza, Bayesa i inni (Ignasiak 1996). Każda działalność człowieka, a przede wszystkim działalność gospodarza, wymaga planowania i kontrolowania podejmowanych czynności. Dążenie przedsiębiorcy jest skupione na osiągnięciu konkretnego celu bądź celów. Cele te, a właściwie możliwości ich realizacji zależą od zasobów zarówno finansowych, organizacyjnych, jak i materialnych. Wymaga to obecnie wspomaganie matematycznego i informatycznego w zakresie podejmowania decyzji. Można zatem stwierdzić, że badania operacyjne, a wśród nich teoria gier, są dziedziną nauki zajmującą się analizą celowych działalności (strategii) oraz generowaniem i oceną ilościową różnych decyzji kierowniczych (Ignasiak 1996).

Praca wykonana w ramach badań własnych AGH nr 10.10.140.793

LITERATURA

- Ignasiak E., (red.), 1996 — Badania operacyjne. PWE, Warszawa.
- Kofler E., 1963 — Wstęp do teorii gier. PZWS, Warszawa.
- Kowalik S., 1994 — Podejmowanie decyzji w oparciu o teorię gier, wykorzystujące zasady gry z Naturą. Zesz. Nauk. Pol. Śl., seria Górnictwo, nr 228, Gliwice.
- Kowalik S., 1997 — Wykorzystanie teorii gier do podejmowania decyzji w górnictwie. Wyd. Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- Krzak M., 2001 — Ekonomiczna optymalizacja gospodarki złożem na przykładzie perspektywicznych rejonów kopalni Rudna. Maszynopis pracy doktorskiej. Arch. Kat. Geologii Gospodarczej i Ochrony Złóż AGH, Kraków.

- Krzak M., 2002 — Zastosowanie metody Monte Carlo w procesie decyzyjnym zagospodarowania perspektywicznych rejonów kopalni Rudna. Mat. VIII Konf. z cyklu „Wykorzystanie złóż kopalni użytecznych”: Rachunek ekonomiczny w gospodarce zasobami. Gosp. Sur. Min. Wyd. IGSMiE PAN, Kraków.
- Łucki Z., 1995 — Ocena inwestycji i podejmowanie decyzji w górnictwie naftowym i gazownictwie. Polska Fundacja Promocji Kadr, Kraków
- Łucki Z. (red.), 2001 — Matematyczne techniki zarządzania. Przykłady i zadania. Wyd. Nauk.-Dydakt. AGH, Kraków
- MICON, 1997 — Analiza działalności górniczej KGHM „Polska Miedź” S. A., Rzeczpospolita Polska. Prospekt emisyjny, Lubin
- Owen G., 1975 — Teoria gier. PWN, Warszawa.
- Potocki C., Przybyła H., 1980 — Badania operacyjne w górnictwie. Skrypty Uczelniane Politechniki Śląskiej, Gliwice.
- Stach-Janaszek I., 2001 — Metoda programowania liniowego. [W]: Matematyczne techniki zarządzania. Przykłady i zadania. Wyd. Nauk.-Dydakt. AGH, Kraków
- Steinhaus H., 1958 — Mc Kinsey o grach. Prace Matemat. II.
- Strzelska-Smakowska B., 2003 — Ocena ekonomiczna złóż rud. Uczeln. Wyd. Nauk.-Dydakt. AGH, Kraków.
- Wieniawski i zespół, 1996 — Badania wzbogacalności rud miedzi z perspektywicznych rejonów eksploatacji i dobór strategii produkcji koncentratów w zmiennych warunkach rynku metali nieżelaznych. Etap III — Program produkcji koncentratów. Sprawozdanie nr 5228/II/96.
- Winnipen J., 1995 — Wartość środowiska. Metody wyceny ekonomicznej. PWE, Warszawa.

MARIUSZ KRZAK

POSSIBLE APPLICATIONS OF THE GAMES THEORY IN MINING

Key words

Game, strategy, decision, operating research, Monte Carlo simulation

Abstract

Foundations of game theory were presented on the paper. On the examples different types of games and methodology of their solutions were defined. The practical utilization of the game theory was presented on the example of the Rudna copper-silver mine. Obtained results were compared with Monte Carlo simulations effects.