

JERZY MARTYNIAK*

Niepewność wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego w badaniach wrywkowych

Słowa kluczowe

Produkty ziarniste, badania wrywkowe, estymacja wielowymiarowo-wektorowa, niepewność estymacyjna, model matematyczny

Streszczenie

W artykule przedstawiono problem niepewności cechującej wyniki oznaczania parametrów jakościowych produktów ziarnistych, która powstaje w badaniach wrywkowych. Poruszono zagadnienie zdefiniowania produktu ziarnistego jako populacji generalnej elementów. W nawiązaniu do zasady opisu statystycznego przybliżenia estymatora oznaczanej właściwości produktu, sprecyzowano pojęcie niepewności, która charakteryzuje wyniki oznaczania jego jakości. Podano matematyczną postać prawdopodobieństwa, które wyraża niepewność w estymacji wielowymiarowej oraz w estymacji wektorowej. Zwrócono uwagę na związek istniejący między niepewnością wyników oznaczania jakości produktu ziarnistego a ryzykiem ekonomicznym. Jest to uzasadnienie znaczenia znajomości jej liczbowego określenia.

Wprowadzenie

Produkty ziarniste składowane i transportowane luzem są wyjątkowo trudne, gdy trzeba zrealizować badania w celu oszacowania ich parametrów jakościowych. Trudności badawcze wynikają po pierwsze — z niejednoznaczności określenia produktu ziarnistego jako populacji generalnej jednostek statystycznych, a po drugie — z jego skomplikowanej

* Doc. dr hab. inż., Główny Instytut Górnictwa, Katowice.

struktury komponentowej i dużej ilości właściwości, które charakteryzując tę strukturę, przedstawiają jego jakość. Poszczególne parametry jakościowe mogą być szacowane przy użyciu techniki pomiaru ciągłego lub przeprowadzeniu badań wrywkowych. Za pomocą pomiarów ciągłych można badać tylko niektóre parametry. Wszystkie parametry mogą być natomiast szacowane przy zastosowaniu badań wrywkowych, polegających na badaniu bardzo małej części produktu, reprezentującej znacznie większą jego ilość. Ich zastosowanie powoduje, że wyniki oznaczania zawsze są lepszym lub gorszym przybliżeniem badanych parametrów produktu.

W ocenie jakości produktu ziarnistego istotne jest, z jakim statystycznym przybliżeniem wyniki oznaczania przedstawiają jego rzeczywiste właściwości. Znajomość tego przybliżenia jest główną zasadą reprezentacyjnej metody badań (Pawłowski 1972; Zasępa 1972; Steczkowski 1988). Zapewnia ona najmniej kosztowne pozyskanie potrzebnych informacji o jakości produktu, które mają pożądaną miarodajność. Dlatego też metoda reprezentacyjna jest rekomendowana jako spełniająca kryteria racjonalności.

W przypadku produktów ziarnistych, które różnią się stopniem komplikacji ich charakterystyk jakości, niezbędne są adekwatne do niego metody estymacji. Odpowiednim rozwiązaniem metody reprezentacyjnej dla nich jest estymacja wielowymiarowo-wektorowa, której model wykorzystano do określenia niepewności wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego.

1. Produkt ziarnisty jako zbiorowość jednostek statystycznych

Naturalnymi elementami, z których składa się ziarnisty produkt sypki, są poszczególne ziarna. Zazwyczaj występują między nimi różnice spowodowane bądź to brakiem jednej lub więcej cech wspólnych, bądź intensywnością ich występowania. Zasady reprezentacyjnej metody badań wrywkowych wykluczają jednakże uznanie naturalnej postaci produktu ziarnistego, a mianowicie zbiorowości utworzonej z poszczególnych ziarn — jako jej elementów składowych, za nadającą się do rozważanego badania, ponieważ nie są one jednostkami, które mogą być pojedynczo losowo pobierane, a więc — być traktowane jako jednostki losowania. Jest to zawsze konieczne, gdy elementy tworzące populację generalną nie są losowo rozmieszczone w badanym produkcie, a przeważnie tak bywa. Z tego względu potrzebna jest taka interpretacja produktu ziarnistego — jako zbiorowości elementów, aby elementy te były przydatne w praktyce, to znaczy dawały się łatwo z niego wyodrębnić i mogły być podstawą operatu losowania.

Jak wiadomo, produkty ziarniste sypkie pobiera się do badań porcjami. W przypadku każdego z nich istnieje możliwość zastosowania różnych technik pobierania próbki pierwotnej, dających możliwość uzyskiwania z niego próbki pierwotnej, mającej różną wielkość. Jednak zawsze zakres wielkości próbki pierwotnej jest ograniczony względami praktycznymi, tylko w takim zakresie zatem istnieje realna możliwość regulowania wielkości próbek pierwotnych. W każdym produkcie ziarnistym można więc rozważać wiele

wariantów wielkości próbki pierwotnej, a tym samym — wiele wariantów populacji generalnej. Stąd określenie produktu ziarnistego jako zbiorowości jednostek losowania jest umowne. Ta sama partia produktu może być zbiorowością zawierającą różną liczbę jednostek losowania, w zależności od założonej ich wielkości. Jest to okoliczność charakterystyczna w badaniach wrywkowych produktów ziarnistych, składowanych i transportowanych luzem. W praktyce, próbki pierwotne nie mogą mieć idealnie równej wielkości. Jednakże w przypadku niewielkiego jej zróżnicowania można uznać, że w przybliżeniu są one sobie równoważne jako jednostki tworzące zbiorowość statystyczną.

Pobieranie próbek jest najtrudniejszym i najważniejszym etapem w procedurze estymacji parametru lub grupy parametrów cechujących produkt ziarnisty. Z wielkością próbki pierwotnej wiąże się pewna szczególna wartość liczbową wariancji badanego parametru. Zależności tej zazwyczaj nie da się w konkretnym przypadku określić bez specjalnych badań (Martyniak 1992, 1998, 1999).

Należy zapewnić losowość (przypadkowość) wyboru próbek pierwotnych wchodzących w skład próbki ogólnej. Klasyczne metody losowania z wykorzystaniem tablic liczb przypadkowych, stosowane w przypadku produktów sztukowych, w praktyce mogą okazać się zupełnie nieprzydatne dla składowanych i transportowanych luzem produktów bezkształtnych, do których zaliczają się produkty ziarniste występujące w tej postaci. Dlatego też w konkretnych okolicznościach może zachodzić potrzeba opracowania i zastosowania metody pośredniej, która spełnia wymogi przypadkowości wyboru próbki pierwotnej. Przed uznaniem jej za właściwą i przyjęciem do stosowania musi ona być jednakże potwierdzona pozytywnym rezultatem testu losowości — dla kolejno pobranych próbek pierwotnych, które mają wejść w skład próbki ogólnej. Przykład posłużenia się tym testem do sprawdzenia hipotezy, że występuje przypadkowość kolejno pobieranych próbek pierwotnych zamieszczono w sprawozdaniu z badania naturalnych warunków w procesie wzbogacania węgla, które są brane pod uwagę przy opracowaniu statystycznych metod kontrolnych (Martyniak i in. 2001).

Oznaczając symbolem m_e średnią masę próbki pierwotnej, a symbolem m masę produktu, którego parametry jakościowe stanowią przedmiot estymacji, można obliczyć liczbę n jednostek o wielkości próbki pierwotnej, z których składa się ten produkt. Teoretycznie istnieje więc fizyczna możliwość rozdzielenia go na takie jednostki. Liczbę n określa stosunek

$$n = \frac{m}{m_e}$$

Takie jednostki, mimo że same w widoczny sposób nie wyodrębniają się jako oddzielne elementy w masie produktu ziarnistego, mogą jednakże być w niej zidentyfikowane metodami pośrednimi, co wystarcza, aby mogły one być jednostkami, które można pobrać sposobami zapewniającymi przypadkowość ich wyboru.

Zastosowanie klasycznej metody losowania polega na identyfikacji wszystkich jednostek populacji generalnej, których liczba wynosi n i na ustaleniu kolejności ziden-

tyfikowanych jednostek losowania w przeznaczonym do badania produkcie, z której wynikają ich numery porządkowe. Zestawienie tych numerów jest operatem losowania (Pawłowski 1972).

Parametry jakościowe cechujące partię produktu nie zależą oczywiście od określenia jej jako populacji jednostek losowania. Zależą natomiast od niego kształty statystycznych rozkładów parametrów wykazywanych przez jednostki o różnej wielkości. Dlatego też z punktu widzenia uzyskania konkretnego statystycznego przybliżenia wyników oznaczania — do estymowanych parametrów produktu, wspomniane określenie ma zasadnicze znaczenie.

W jednoznacznie zdefiniowanej — dla produktu ziarnistego — populacji generalnej jednostek losowania poszczególne jednostki są zróżnicowane według jednej lub więcej właściwości. Parametry przedstawiające intensywność występowania pojedynczej cechy jakościowej w jednostkach losowania są jednowymiarową zmienną losową, a wielu cech jakościowych — wielowymiarową zmienną losową. Jeżeli w jednostkach losowania wyróżnia się ich komponenty, które również wykazują zróżnicowane parametry jakości, są one zmienną losową wektorową. Podobnie jest w próbie ogólnej, składającej się z próbek pierwotnych. Jest ona estymatorem co najmniej jednego parametru cechującego produkt ziarnisty lub jego komponent. Jej reprezentatywność jest funkcją stopnia komplikacji oznaczanej charakterystyki jakościowej (Martyniak 1987). W przypadku wielowymiarowo-wektorowego opisu jakości produktu ziarnistego istnieje możliwość oszacowania wartości liczbowych, będących miernikami reprezentatywności próbki ogólnej przekazanej do badań (Martyniak 1994a, c, 1997). Są to składowe matematycznego opisu statystycznego przybliżenia estymowanej charakterystyki jakości badanego produktu — do rzeczywistej, wykazywanej przez estymator reprezentujący tę charakterystykę.

2. Składowe statystycznego przybliżenia estymatorów

Statystyczne przybliżenia przedstawia się za pomocą informacji składającej się z dwóch części (Fisz 1967; Hellwig 1987; Pawłowski 1981). Pierwsza z nich podaje prawdopodobieństwo, którym cechują się możliwe do zrealizowania przypadkowe odchylenia estymatorów, to jest wyników oznaczania parametrów — od ich wartości oczekiwanych, którymi są parametry estymowane. Wygodne jest nazywanie tego prawdopodobieństwa — prawdopodobieństwem estymacyjnym. Druga zaś — precyzuje liczbowe wartości tych odchyleni. W przypadku gdy są to maksymalnie dopuszczalne odchylenia od prawdziwych parametrów produktu, noszą one nazwę tolerancji estymacyjnych.

Są to składowe statystycznego przybliżenia estymatora, będące funkcją zarówno statystycznych parametrów drugiego rzędu, którymi charakteryzują się poszczególne populacje jednostek losowania, jak też liczby przypadkowych jednostek z populacji, których właściwości są elementami składającymi się na tenże estymator. Dla konkretnych danych liczbowych, informujących o parametrach statystycznych populacji generalnej i liczbie

elementów reprezentujących ją w estymatorze, poziom statystycznego przybliżenia jest skonkretyzowaną wielkością stochastyczną, którą wyrażają dwie wspomniane, ściśle ze sobą związane składowe. Może zatem być on przedstawiony za pomocą różnych par wartości liczbowych prawdopodobieństwa i odchylenia branego pod uwagę estymatora. Prawdopodobieństwo to traktuje się wówczas jako jednoznaczłą funkcję wielkości przypuszczalnych odchyleń wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego.

Należy zwrócić uwagę, że jeżeli odchylenia systematyczne obciążające estymator są pomijalne lub nie występują, poziom statystycznego przybliżenia parametrów z estymatora, informuje o poziomie ich reprezentatywności względem parametrów, które w rzeczywistości charakteryzują badaną partię produktu (Martyniak 1986, 1994b, 2001).

3. Matematyczna postać niepewności przyporządkowanej wynikom oznaczania właściwości produktu ziarnistego

Miernikiem niepewności, którą trzeba uwzględniać oceniając jakość produktu ziarnistego, jest prawdopodobieństwo, że wyniki oznaczania cechują się przypadkowymi odchyleniami większymi niż wymagane tolerancje estymacyjne. Z poprzednio podanego określenia statystycznego przybliżenia wyników oznaczania wiadomo, że przypadkowym odchyleniom, które mieszczą się w granicach ustalonych tolerancji odpowiada wiążące się z tymi tolerancjami prawdopodobieństwo estymacyjne, oznaczone symbolem P_E . Istnieje pewność, że albo wszystkie odchylenia przypadkowe będą się znajdowały w granicach tolerancji estymacyjnych, co zdarza się z określonym prawdopodobieństwem estymacyjnym, albo co najmniej jedno z nich przekroczy tolerancję estymacyjną. Z tego wynika, że przekroczenia tolerancji zdarzają się z prawdopodobieństwem P_{1-E} , stanowiącym dopełnienie do 1 prawdopodobieństwa estymacyjnego. A zatem:

$$P_E + P_{1-E} = 1 \quad \text{ i } \quad P_{1-E} = 1 - P_E$$

Wobec tego miernikiem niepewności, która dotyczy wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego jest prawdopodobieństwo P_{1-E} , że zrealizuje się niekorzystna rozbieżność pomiędzy oznaczoną i prawdziwą charakterystyką jakości produktu, dotycząca co najmniej jednej jego właściwości. Jest ono liniową funkcją estymacyjnego prawdopodobieństwa P_E .

4. Niepewność w estymacji wielowymiarowej

W przypadku estymacji wielowymiarowej, miarą dopuszczalnej rozbieżności pomiędzy prawdziwą i oznaczoną charakterystyką jakości produktu ziarnistego są następujące składowe statystycznego przybliżenia (Deutsh 1969; Martyniak 1994a, b):

- zbiór $\{\dots\Delta_i\dots\}$ tolerancji estymacyjnych, ustalonych dla poszczególnych właściwości, które są oznaczane w celu ilościowego ich określenia,
- przyporządkowane temu zbiorowi prawdopodobieństwo estymacyjne $P_E(\{\dots\Delta_i\dots\})$, które jest prawdopodobieństwem zdarzenia złożonego, składającego się ze zdarzeń elementarnych, a mianowicie przekroczeń granic wyrażonych przyjętymi tolerancjami przez odchylenia estymatorów poszczególnych parametrów jakościowych.

Symbol i jest liczbą porządkową parametru jakościowego produktu oraz jego estymatora.

Realizacja procedury estymacyjnej prowadzi do osiągnięcia konkretnego statystycznego przybliżenia estymatora (estymatorów) do estymowanego parametru (estymowanych parametrów) jakości produktu, które jest funkcją:

- odchylenia standardowego $s(1)$, występującego w populacji jednostek losowania, różniących się ze względu na oznaczane właściwości,
- liczby n jednostek losowania z tejże populacji, wchodzących w skład danego estymatora.

Statystyczne przybliżenie estymatora można przedstawić dwojako — bądź jako osiągnięte odchylenie (odchylenia) wyniku (wyników) oznaczania parametru (parametrów) od estymowanego parametru (estymowanych parametrów) z danym prawdopodobieństwem $(P_E)_z$, bądź jako osiągnięte prawdopodobieństwo $(P_E)_u$ dla danego odchylenia (odchylen) wyniku (wyników) oznaczania parametru (parametrów) — od estymowanego parametru (estymowanych parametrów), którym (którymi) może (mogą) być tolerancja estymacyjna (tolerancje estymacyjne). W przypadku oceny niepewności, jako funkcji probabilistycznej składowej statystycznego przybliżenia, chodzi oczywiście o tę drugą możliwość.

Odchylenia estymatorów, które powinny charakteryzować procedurę estymacyjną najczęściej są dostosowywane do wymaganych tolerancji estymacyjnych za pomocą odpowiedniej liczby n jednostek losowania, które powinny tworzyć estymator. Jeżeli w toku procedury estymacyjnej otrzymano estymatory złożone z innej liczby jednostek losowania, ich statystyczne przybliżenie różni się od pożądanego. Zamierzając ocenić je ze względu na składową probabilistyczną, dla każdego z nich wyznacza się uzyskane indywidualne prawdopodobieństwo estymacyjne $P_E(\Delta_i)_u$, nazywane w terminologii statystycznej kontroli jakości dotyczącej estymacji przedziałowej — poziomem ufności (Fisz 1967; Deutsh 1969; Bobrowski 1980; Zieliński 1990). W tym celu korzysta się z odpowiedniego typu matematycznego modelu rozkładu prawdopodobieństwa jednowymiarowej zmiennej losowej, do którego jest podobny rozkład prawdopodobieństwa branego pod uwagę estymatora. Najczęściej są to funkcje ciągłe gęstości prawdopodobieństwa i wynikające z nich dystrybuanty rozkładów prawdopodobieństwa. W modelach tych prawdopodobieństwo estymacyjne jest funkcją liczbowej wartości oznaczanej symbolem t , która dzieli zakres zmienności zmiennej losowej na części. Wielkość t jest związana z odchyleniem standardowym zmiennej losowej s . Tolerancja estymacyjna Δ wskazuje konkretną wartość liczbową t , która jest współczynnikiem proporcjonalności w liniowej zależności między tolerancją estymacyjną a odchyleniem standardowym zmiennej losowej

$$\Delta = ts$$

Wygodne jest nazywanie wielkości t współczynnikiem ufności, zgodnie z definicją zalecaną w Polskich Normach (PN-74/N- 01051 Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Nazwy, określenia, symbole: p. 3.8.23).

W celu określenia estymacyjnego prawdopodobieństwa $P_E(\{\dots\Delta_i\dots\})_u$ wielowymiarowej zmiennej losowej, trzeba obliczyć realne wartości liczbowe współczynników proporcjonalności $t_i(n)$, kształtujące się przy tolerancjach Δ_i , w zależności od odchyień $s_i(n)$ charakteryzujących estymatory poszczególnych właściwości, korzystając z relacji:

$$t_i(n) = \frac{\Delta_i}{s_i(n)} = \frac{\Delta_i}{s_i(1)} \sqrt{n}$$

gdyż $s_i(n)$ jest dane wzorem

$$s_i(n) = \frac{s_i(1)}{\sqrt{n}}$$

w którym $s_i(1)$ jest to odchylenie standardowe w populacji pojedynczych jednostek losowania, a n jest ich liczbą w podlegającym ocenie estymatorze.

Matematycznym modelem prawdopodobieństwa $P_E(\{\dots\Delta_i\dots\})_u$, jeżeli oznacza się co najmniej dwie niezależne od siebie właściwości produktu ziarnistego, przy założeniu normalności statystycznego rozkładu ich estymatorów, jest model kształtowania się tego prawdopodobieństwa według następującej zależności (Martyniak 1994a i b):

$$P_E(\{\dots\Delta_i\dots\})_u = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_i(n)}^{t_i(n)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta_i}{s_i(1)\sqrt{n}}}^{\frac{\Delta_i}{s_i(1)}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

Niepewność wyników oznaczania właściwości wielowymiarowo charakteryzujących jakość produktu ziarnistego, wyrażona prawdopodobieństwem P_{1-E} , zgodnie z istniejącą, jak poprzednio wykazano, jego zależnością od prawdopodobieństwa estymacyjnego, jest równa:

$$P_{1-E} = 1 - P_E(\{\dots\Delta_i\dots\})_u = 1 - \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta_i}{s_i(1)\sqrt{n}}}^{\frac{\Delta_i}{s_i(1)}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

5. Niepewność w estymacji wektorowej

Jeżeli w produkcie ziarnistym przewiduje się oznaczanie co najmniej jednej właściwości, co najmniej jednego jego komponentu, po wydzieleniu go z próbki ogólnej tego produktu, ocenę statystycznego przybliżenia wyniku (wyników) oznaczania oraz możliwość dostosowania procedury estymacyjnej w celu osiągnięcia statystycznego przybliżenia wymaganego dla wyniku (wyników) oznaczania parametru (parametrów) jakościowego (jakościowych) komponentu (komponentów), zapewnia zastosowanie zasad estymacji wektorowej (Martyniak 1994a, b). Obejmuje ona również przypadek równoczesnego oznaczania w próbie ogólnej właściwości produktu traktowanego, jako całość.

Oznaczając co najmniej jedną charakterystykę jakości komponentu wchodzącego w skład produktu ziarnistego, uzyskuje się co najmniej jednowektorowe, zawierające jeden (jednowielowymiarowe) lub więcej (wielowymiarowe) wyników oznaczania parametrów jakościowych, które informuje o produkcie ziarnistym, przedstawiając jakość interesujących nas, wchodzących w jego skład komponentów. Wobec tego estymacja wielowymiarowa jest zredukowaną estymacją wektorową, to znaczy szczególnym przypadkiem bardziej ogólnego pojęcia estymacji wektorowej.

Dostosowanie miary dopuszczalnej rozbieżności pomiędzy prawdziwą i oznaczoną charakterystyką jakości produktu ziarnistego do potrzeb estymacji wektorowej polega na jej odpowiednim uogólnieniu. Określają ją następujące składowe:

- zbiór $[... \{... \Delta_i ... \}_{j...}]$ tolerancji estymacyjnych, ustalonych dla poszczególnych właściwości, które są oznaczane w celu ilościowego ich określenia,
- przyporządkowane temu zbiorowi prawdopodobieństwo estymacyjne $P_E([... \{... \Delta_i ... \}_{j...}])$, że uzyskane w przeprowadzonej procedurze estymacyjnej odchylenia estymatorów poszczególnych parametrów jakościowych nie przekraczają granic odpowiadających wymaganym tolerancjom.

Liczba porządkowa i wskazuje tolerancje estymacyjne Δ dla wyników oznaczania parametrów wielowymiarowo opisujących jakość produktu ziarnistego lub jego komponentu. Liczbą porządkową j identyfikuje się zestawienia $\{... \Delta_i ... \}$ tolerancji estymacyjnych, przyporządkowanych odchyleniom wyników oznaczania parametrów jakościowych, które wchodzi w skład poszczególnych wektorowych charakterystyk jakości.

Niepewność wyników oznaczania, ujętych w wektorowej charakterystyce jakości, zgodnie z założonym znaczeniem tego pojęcia, jest wyrażona prawdopodobieństwem P_{1-E} , które zależy od prawdopodobieństwa $P_E([... \{... \Delta_i ... \}_{j...}])_u$, to jest — probabilistycznej składowej statystycznego przybliżenia, którym cechuje się dany wektorowy estymator. Jest ona funkcją poszczególnych prawdopodobieństw $P_E(\{... \Delta_i ... \}_{j...})_u$, jako probabilistycznych składowych statystycznego przybliżenia jedno- lub wielowymiarowych estymatorów komponentowych. Jeżeli estymatory te są niezależnymi zmiennymi losowymi, prawdopodobieństwo danej ich kombinacji jest iloczynem prawdopodobieństw realizacji wartości liczbowych tych estymatorów i w tym przypadku zachodzi relacja:

$$P_{1-E} = 1 - P_E([\dots\{\dots\Delta_{i\dots}\}_{j\dots}]_u) = 1 - \prod_j P_E(\{\dots\Delta_{i\dots}\}_{j})_u$$

Statystyczne przybliżenia dotyczące wielowymiarowych estymatorów komponentowych są analogiczne do przybliżeń w estymacji wielowymiarowej.

Komponentowe prawdopodobieństwo estymacyjne $P_E(\{\dots\Delta_{i\dots}\}_{j})_u$, przy założeniu niezależności branych pod uwagę estymatorów, jest z kolei iloczynem prawdopodobieństw odpowiadających zrealizowanym wartościom liczbowym estymatorów poszczególnych właściwości tworzących jakościową charakterystykę j -tego komponentu. Jeżeli statystyczne rozkłady estymatorów są zbliżone do rozkładu normalnego, ma on postać:

$$P_E(\{\dots\Delta_{i\dots}\}_{j})_u = \prod_{i(j)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t_{ij}(n)}^{t_{ij}(n)} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \prod_{i(j)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta_{ij}(1)}{s_{ij}(1)}\sqrt{n}}^{\frac{\Delta_{ij}}{s_{ij}(1)}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

W powyższych wzorach odzwierciedlają się oczywiście takie same jak w estymacji wielowymiarowej wzajemne powiązania współczynników ufności, tolerancji estymacyjnych i odchyłeń standardowych, zidentyfikowanych takimi samymi liczbami porządkowymi.

Zakładając wzajemną niezależność wektorów właściwości tworzących charakterystykę jakości produktu ziarnistego, rozważaną niepewność wyników jej oznaczania można skontekstyzować za pomocą następującego modelu matematycznego:

$$P_{1-E} = 1 - \prod_j P_E(\{\dots\Delta_{i\dots}\}_{j})_u = 1 - \prod_j \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta_{ij}(1)}{s_{ij}(1)}\sqrt{n}}^{\frac{\Delta_{ij}}{s_{ij}(1)}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

6. Związek niepewności charakteryzującej wyniki oznaczania jakości z ryzykiem ekonomicznym

W wyrzykowych badaniach produktów ziarnistych nie można uniknąć niedokładności, które obciążają wyniki oznaczania parametrów jakościowych tychże produktów. Jest to źródłem następującej niepewności: czy istniejąca rozbieżność między wynikiem oznaczania a parametrem jakości produktu ziarnistego przekracza granice wynikające z wymaganych tolerancji? Przeprowadzone rozważania wskazują, że liczbowym miernikiem tej niepewności jest prawdopodobieństwo P_{1-E} , które jest dopełnieniem do jedności dla prawdopodobieństwa estymacyjnego P_E .

Decyzje o postępowaniu z produktem ziarnistym podejmuje się na podstawie wyników badania jego jakości. Jeżeli więc prawdopodobieństwo, że wyniki te odbiegają w znacznym

stopniu od faktycznych parametrów byłoby duże, zdarzenia takie byłyby dość częste, stąd niektóre decyzje byłyby błędne i prowadziły do strat finansowych. W rezultacie powstaje ryzyko ekonomiczne związane z przybliżonym ustaleniem jakości produktu na podstawie wyników oznaczania, które mogą znacząco różnić się od jego parametrów estymowanych.

Przyjmuje się, że wyniki oznaczania mieszczące się w granicach tolerancji estymacyjnych nie różnią się istotnie od estymowanych parametrów produktu. Te natomiast, które je przekroczyły, uznaje się za istotnie różniące się od jego rzeczywistych parametrów. Dopiero wówczas powzięta na ich podstawie decyzja prowadzi do straty finansowej. Wobec tego prawdopodobieństwo tejże straty jest równe prawdopodobieństwu otrzymania wyników oznaczania, których odchylenia są większe niż wymagane tolerancje estymacyjne. Z poprzednich rozważań wynika, że jest to prawdopodobieństwo P_{1-E} , bliżej precyzujące niepewność zawsze towarzyszącą badaniom weryfikacyjnym.

Niektóre aspekty rozważanego ryzyka są dyskutowane w publikacji Autora (Martyniak 2000).

Oznaczając symbolem d możliwy ubytek finansowy, spowodowany decyzją powziętą na podstawie wyników oznaczania różniących się istotnie od parametrów badanego produktu i symbolem $P(d)$ prawdopodobieństwo urzeczywistnienia się ubytku finansowego d , który jest stratą, ryzyko ekonomiczne R z tym związane jest równe:

$$R = d P(d)$$

wiedząc zaś, że

$$P(d) = P_{1-E}$$

rozpatrywane ryzyko jest funkcją liczbowo sprecyzowanej niepewności charakteryzującej wyniki oznaczania jakości produktu ziarnistego

$$R = d P_{1-E}$$

Jak widać, ryzyko ekonomiczne związane z rozważaną niepewnością jest iloczynem dwu czynników składowych. W nawiązaniu do ich znaczenia, czynnik mający charakter probabilistyczny, którym jest prawdopodobieństwo P_{1-E} , wygodnie jest nazywać probabilistyczną składową, a czynnik ujmujący wielkość prawdopodobnej straty finansowej — finansową składową ryzyka ekonomicznego.

Podsumowanie

W działalności gospodarczej coraz częściej wymagane są kompleksowe analizy ekonomiczne z uwzględnieniem wszystkich istotnych czynników ekonomicznej efektywności. Należy do nich dokładna znajomość parametrów jakości produktów ziarnistych. Są one

jednakże bardzo trudne dla miarodajnego określenia ich parametrów jakościowych. Należy więc zwrócić uwagę na źródła niepewności związanej z metodą badań wyrywkowych, stosowaną do oznaczania jakości produktów ziarnistych. Miarą niepewności charakteryzującej wyniki oznaczania, przedstawiające jakość produktu ziarnistego — jest prawdopodobieństwo niedotrzymania ustalonych tolerancji estymacyjnych w zastosowanej procedurze estymacyjnej. Matematyczny model jego kształtowania się informuje o wpływie poszczególnych czynników na wspomnianą niepewność.

Zasadniczą rolę odgrywa związek miarodajności wyników oznaczania właściwości produktu ziarnistego, określonej niepewnością zachowania wymaganych tolerancji estymacyjnych, z ekonomicznym ryzykiem. Prawdopodobieństwo, które wyraża poziom tej niepewności — jest probabilistyczną składową odpowiadającą jej ryzyka.

LITERATURA

- Bobrowski D., 1980 — Probabilistyka w zastosowaniach technicznych. PWN, Warszawa.
- Deutsh R., 1969 — Teoria estymacji. PWN, Warszawa.
- Fisz M., 1967 — Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.
- Hellwig Z., 1987 — Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej. PWN, Warszawa.
- Martyniak J., 1986 — Teoretyczne podstawy uogólnionej metody reprezentacyjnych badań kopalni stałych. Prace GIG, seria dodatkowa.
- Martyniak J., 1987 — Wpływ zróżnicowania charakterystyk próbek kopalni stałych na ich reprezentatywność. Przegląd Górniczy nr 11—12.
- Martyniak J., 1992 — Wariacje właściwości kopalni w populacjach próbek pierwotnych. Archiwum Górnictwa 37, 2.
- Martyniak J., 1994a — Miarodajność charakterystyk węgla w świetle analizy wielowymiarowej i wektorowej. Prace Naukowe GIG nr 790.
- Martyniak J., 1994b — A multidimensional and multiwectorial criterion of representativeness for preparation properties of coal. Gosp. Sur. Min. 10, 2.
- Martyniak J., 1994c — A method to assess the reliability of coal preparation parameters characterizing a collected sample. Gosp. Sur. Min. 10, 4.
- Martyniak J., 1997 — Podstawy i przykłady szacowania mierników reprezentatywności próbek ogólnych węgla. Przegląd Górniczy nr 6.
- Martyniak J., 1998 — The factors forming the interincrement variance. Gosp. Sur. Min. 14, 3.
- Martyniak J., 1999 — Związek między wielkością próbek pierwotnych a wariancją właściwości w ich populacji. Przegląd Górniczy nr 4.
- Martyniak J., 2000 — Warunek zmniejszenia ryzyka błędu oszacowania właściwości kopaliny decydujących o jej zakwalifikowaniu do konkretnej kategorii jakościowej. Gosp. Sur. Min. 16, 1.
- Martyniak J. i in., 2001 — Naturalne uwarunkowania statystycznych metod kontrolnych w procesie wzbogacania węgla. Prace Naukowe GIG nr 844.
- Martyniak J., 2001 — Kryterium i metoda oceny zgodności oznaczonej i rzeczywistej jakości produktu ziarnistego. Archiwum Górnictwa 46, 4.
- Pawłowski Z., 1972 — Wstęp do statystycznej metody reprezentacyjnej. PWN, Warszawa.
- Pawłowski Z., 1981 — Statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.
- Steczowski J., 1988 — Zastosowanie metody reprezentacyjnej w badaniach społeczno-ekonomicznych. PWN, Warszawa.
- Zasępa R., 1972 — Metoda reprezentacyjna. PWE, Warszawa.
- Zieliński R., 1990 — Siedem wykładów wprowadzających do statystyki matematycznej. PWN, Warszawa.

THE UNCERTAINTY OF DETERMINED PROPERTY VALUES CHARACTERIZES A LOT OF PARTICULATE PRODUCT

Key words

Particulate products, sampling, estimation uncertainty, multidimension and vectorial estimation, mathematical model

Abstract

In this paper there is paid attention to the necessity to know the uncertainty concerning the quality determination result statement characterizes a lot of particulate product. Unfortunately, the mathematical models for this and the indispensable informations about the statistical parameters of involving random variables, are lacked. The published multidimensional and vectorial estimation method (Martyniak 1994b) enables to deduce these models and arrangement the research for obtaining these informations. First of all, the probability of occurrence that the true quality parameters of particulate product are found out the utmost of the permissible tolerance for determination results, had to be expressed in shape of the mathematical model. Further, it was possible to derivate the formulas for the probable to manifest quantitatively the estimation uncertainty. These are as follows:

a) the case when the quality circumscription of product is multidimensional:

$$P_{1-E} = 1 - P_E(\{\dots\Delta_i\dots\})_u = 1 - \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta_i}{s_i(1)}\sqrt{n}}^{\frac{\Delta_i}{s_i(1)}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

b) the case when the quality circumscription of product is one or multi-vectorial:

$$P_{1-E} = 1 - \prod_j P_E(\{\dots\Delta_{ij}\dots\})_u = 1 - \prod_j \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\Delta_{ij}}{s_{ij}(1)}\sqrt{n}}^{\frac{\Delta_{ij}}{s_{ij}(1)}\sqrt{n}} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

The used symbol explanations:

- P_{1-E} — the probability is the evaluation of uncertainty,
- P_E — the estimation probability of attainment all the estimates according to their tolerances,
- Δ — the tolerance for the estimate (determination result) of a product characteristic value,
- u — the index for the *probability a posteriori* after the estimation procedure,
- i — the ordinal number for a characteristic of product or its component,
- j — the ordinal number for a characteristic value vector of product,
- n — the number of random sampling units composing the estimates of characteristic values of product or its component,
- $s(1)$ — the standard deviation of a product or component characteristic in the general population of sampling units.

In sampling of particular products there is not possible to avoid inaccuracy accompanying determination quality parameters of particular products. Therefore for making a decision of lot acceptance, the risk due to deviation of received results with regard to the estimated specific characteristic values exists. The probability P_{1-E} is the probabilistic constituent of this risk R that is given by the following formula

$$R = d P_{1-E}$$

where: d — the financial loss being the financial constituent of risk.