

MODELE HYBRYDOWE MSV-MGARCH Z TRZEMA PROCESAMI UKRYTYMI W BADANIU ZMIENNOŚCI CEN NA RÓŻNYCH RYNKACH

JACEK OSIEWALSKI

Katedra Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie,
e-mail: eosiewa@cyf-kr.edu.pl

KRZYSZTOF OSIEWALSKI

studia doktoranckie Wydziału Finansów Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie,
e-mail: krzysztof@osiewalski.eu

Praca została przedstawiona przez autorów na posiedzeniu Komisji Nauk Ekonomicznych i Statystyki Oddziału PAN w Krakowie 24 października 2011 roku.

ABSTRACT

J. Osiewalski, K. Osiewalski *Hybrid MSV–MGARCH models with three latent processes in examining price volatility on different markets*, Folia Oeconomica Cracoviensia

J. Osiewalski and A.Pajor (2007, 2009) and J. Osiewalski (2009) introduced hybrid multivariate stochastic variance — GARCH (MSV–MGARCH) models, where the conditional covariance matrix is the product of a univariate latent process and a matrix with a simple MGARCH structure (Engle's DCC or scalar BEKK). The aim was to parsimoniously describe volatility of a large group of assets. The proposed hybrid specifications, similarly as other models from the MSV class, require the Bayesian approach equipped with MCMC simulation tools. In order to jointly describe volatility on two different markets (or of two different groups of assets), J. Osiewalski and K.Osiewalski (2011) consider more complicated hybrid models with two latent processes. These new specifications seem very promising due to their good fit and moderate computational requirements.

This paper is devoted to hybrid specifications with three latent processes, even more complicated and located on the edge of possibilities of conducting exact Bayesian analysis. We present full Bayesian inference for such models and propose efficient MCMC simulation strategy. Our approach is used to jointly model volatility of six daily time series representing three different groups: two stock indices, prices of gold and silver, prices of oil and natural gas. We formally compare joint modelling to individual bivariate volatility modelling for each of three groups.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

Quantitative finance, Volatility analysis, multivariate SV processes, Bayesian inference

Ilościowe finanse, Analiza zmienności, wielowymiarowe procesy SV, wnioskowanie bayesowskie

1. WSTĘP

Osiewalski (2009) oraz Osiewalski i Pajor (2007, 2009) wprowadzili hybrydowe wielowymiarowe modele stochastycznej zmienności lub wariancji (*hybrid multivariate stochastic volatility or variance (MSV) models*). Ich macierz warunkowych kowariancji jest iloczynem pojedynczego procesu ukrytego i macierzy o strukturze zaczerpniętej z prostych procesów MGARCH (DCC, SBEKK). Zaproponowane modele hybrydowe (zwłaszcza model MSF–SBEKK typu I) są przydatne zarówno ze względu na wysoką zdolność opisu zmienności stóp zwrotu, jak i możliwość zastosowania do wielu cen łącznie; Osiewalski i Pajor (2010, 2011) wykorzystują tę specyfikację w analizie ryzyka portfela inwestycyjnego złożonego z akcji kilkunastu spółek.

Jednak pojedynczy proces ukryty wydaje się ograniczać zasadność stosowania modeli hybrydowych tylko do jednorodnych danych (np. zmian cen na jednym rynku). Dlatego Osiewalski i Osiewalski (2011) zaproponowali uogólniony model hybrydowy MSF–SBEKK wykorzystujący dwa procesy ukryte. Przedstawili jego pełną bayesowską analizę statystyczną oraz zastosowanie w przypadku czterowymiarowym: cen złota i srebra oraz dwóch indeksów giełdowych. Przykład ten uzasadnił użycie odrębnych procesów ukrytych w łącznym opisie zmienności na rynkach akcji i metali, a także ukazał powiązania między tymi odrębnymi rynkami zachodzące nawet przed ostatnim kryzysem (dane pochodzą z okresu 8.01.1999–1.02.2006).

W tej pracy proponujemy ogólniejszą strukturę hybrydową, wykorzystującą trzy procesy ukryte. Takie modele MSV są jeszcze dość oszczędne pod względem liczby parametrów i procesów ukrytych, a powinny lepiej (niż model MSF–SBEKK) opisywać zmienność cen na trzech odrębnych rynkach czy składowych portfela zawierającego trzy odrębne grupy aktywów. Aby empirycznie sprawdzić, czy łączne ujęcie zmienności jest wciąż zasadne, rozważamy ten sam okres, ale sześć szeregów czasowych. Przejście od modelu hybrydowego z dwoma procesami ukrytymi do modelu o trzech procesach wydaje się warte uwagi. Głównym problemem nie jest strona teoretyczna takiego uogólnienia, lecz konsekwencje obliczeniowe, gdyż ze wzrostem liczby zmiennych ukrytych (o wielkość równą liczbie obserwacji) znacząco rośnie czas niezbędny do przeprowadzenia symulacji MCMC z rozkładu *a posteriori*. Celem częściowym pracy jest więc sprawdzenie możliwości prowadzenia dokładnej analizy bayesowskiej w nowym przypadku oraz porównanie analizy dokładnej z przybliżoną, polegającą na zastąpieniu głównych macierzy parametrów wartościami opartymi na ocenach MNK.

Następna (druga) część pracy poświęcona jest nowemu modelowi i jego ujęciu bayesowskiemu (zarówno dokładnemu, jak i przybliżonemu). W części trzeciej zastosowano nowy model do łącznego opisu zmienności dwóch indeksów giełdowych, cen złota i srebra oraz ropy naftowej i gazu ziemnego. Podsumowanie wskazujące kierunki dalszych badań stanowi część czwartą (ostatnią).

2. POSTAĆ MODELU I JEGO ANALIZA BAYESOWSKA

Rozważamy n synchronicznych szeregów czasowych (po T obserwacji), które zawierają logarytmiczne stopy zwrotu (zmian cen) $n = n_1 + n_2 + n_3$ aktywów finansowych, należących do trzech odrębnych grup. Dane z okresu t , zawarte w wierszu $r_t = (r_{t1} \dots r_{tn})$ opisujemy (standardowo) procesem VAR(1) — wektorowej autoregresji rzędu 1:

$$r_t = \delta_0 + r_{t-1}\Delta + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, T, \quad (1)$$

charakteryzowanym przez $n(n+1)$ -wymiarowy wiersz parametrów $\delta = (\delta_0 (\text{vec } \Delta)')$, który to zapis uzyskujemy dzięki wektoryzacji macierzy współczynników Δ . Dla ε_t , tj. wiersza n składników losowych w równaniu VAR(1), przyjmujemy (warunkowy względem przeszłości, oznaczanej ψ_{t-1} , i bieżących zmiennych ukrytych) n -wymiarowy rozkład normalny o zerowej wartości oczekiwanej i macierzy kowariancji

$$\Omega = \begin{bmatrix} g_{11}H_{t,11} & \sqrt{g_{11}g_{12}}H_{t,12} & \sqrt{g_{11}g_{13}}H_{t,13} \\ \sqrt{g_{12}g_{11}}H_{t,21} & g_{12}H_{t,22} & \sqrt{g_{12}g_{13}}H_{t,23} \\ \sqrt{g_{13}g_{11}}H_{t,31} & \sqrt{g_{13}g_{12}}H_{t,32} & g_{13}H_{t,33} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Skalary g_{ii} w (2) są dodatnimi zmiennymi nieobserwowalnymi (ukrytymi), zaś $H_{t,ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) są blokami ($n_i \times n_j$) macierzy kwadratowej (stopnia n) postaci

$$H_t = (1 - \beta - \gamma)A + \beta\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-1}' + \gamma H_{t-1}, \quad (3)$$

gdzie β i γ są dodatnimi parametrami skalarnymi, spełniającymi warunek $\beta + \gamma < 1$, zaś A jest macierzą symetryczną i dodatnio określoną, zawierającą $n(n+1)/2$ swobodnych parametrów. Macierz H_t jest samoistną macierzą warunkowych kowariancji w tzw. skalarnym modelu BEKK (SBEKK), prostej specyfikacji z klasy wielowymiarowych modeli GARCH (MGARCH), które omawiają Bauwens, Laurent i Rombouts (2006). Gdyby przyjąć $g_{ii} = 1$ ($i = 1, 2, 3$), ε_t byłyby opisane modelem SBEKK(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym. Jednak w naszej specyfikacji zakładamy, że 1° ciąg zmiennych ukrytych $\ln(g_{ii})$ ($t \in Z$, ustalone i) tworzy gaussowski proces AR(1), a 2° ciąg warunkowych macierzy kowariancji Ω_t zależy od trzech procesów ukrytych tak, że wariancje n_i aktywów z grupy i zawierają czynnik g_{ii} . Warunkowe kowariancje zależą od g_{iiv} , jednak sposób wprowadzenia zmiennych ukrytych do macierzy Ω_t sprawia, że warunkowe współczynniki korelacji zależą nie od g_{iiv} lecz od elementów macierzy H_t i mają taką samą postać $h_{t,kl} / \sqrt{h_{t,kk}h_{t,ll}}$ ($k, l = 1, \dots, n$), jak w modelu SBEKK.

W podstawowej wersji naszego hybrydowego modelu MSV ukryte procesy AR(1) mają odrębne parametry i są niezależne:

$$\begin{aligned} \ln(g_{ii}) &= \phi_i \ln(g_{i-1,i}) + \eta_{ii} \quad (i = 1, 2, 3) \\ \eta_{ii} &\sim iN(0, \tau_i^{-1}), \quad \eta_{ii} \perp \eta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (4)$$

przy czym $\tau_{it} > 0$ oraz $-1 < \varphi_{it} < 1$. Założenie, iż procesy ukryte są identyczne ($g_{t1} = g_{t2} = g_{t3}$) sprowadziłoby nasz nowy model do modelu MSF-SBEKK (typu I), czyli specyfikacji hybrydowej z jednym procesem ukrytym, którą zaproponował Osiewalski (2009). Jedynym teoretycznie uzasadnionym i praktycznie realizowalnym podejściem do wnioskowania statystycznego jest w przypadku modelu (1)–(4) podejście bayesowskie, umożliwiające intuicyjną, probabilistyczną interpretację wyników, stosunkową łatwą analizę dla modeli ze zmiennymi ukrytymi i formalne porównanie mocy objaśniającej konkurencyjnych specyfikacji niezagnieżdżonych.

Bayesowska wersja proponowanego modelu MSV-MGARCH zdefiniowana jest przez rozkład prawdopodobieństwa obserwacji, zmiennych ukrytych i parametrów. Jego funkcja gęstości ma postać

$$\begin{aligned} & p(r_1, \dots, r_T, g_{11}^{-1}, \dots, g_{T1}^{-1}, g_{12}^{-1}, \dots, g_{T2}^{-1}, g_{13}^{-1}, \dots, g_{T3}^{-1}, \theta | \psi_0) \\ &= p(\omega) \left(\prod_{j=1}^3 p(\varphi_j) p(\tau_j) \right) \prod_{t=1}^T p(r_t, g_{t1}^{-1}, g_{t2}^{-1}, g_{t3}^{-1} | \theta, \psi_{t-1}), \end{aligned} \quad (5)$$

gdzie ω grupuje parametry struktur VAR i SBEKK, θ — wszystkie parametry, zaś

$$\begin{aligned} p(r_t, g_{t1}^{-1}, g_{t2}^{-1}, g_{t3}^{-1} | \theta, \psi_{t-1}) &= (2\pi)^{-n/2} (\det H_t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \varepsilon_t' \Omega_t^{-1} \varepsilon_t\right) \times \\ &\times \prod_{j=1}^3 (g_{tj}^{-1})^{(n_j/2)-1} f_N^1(\ln g_{tj}^{-1} | \varphi_j, \ln g_{t-1,j}^{-1}, \tau_j^{-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

jest gęstością warunkowego (względem przeszłości) rozkładu obserwacji i zmiennych ukrytych z okresu t . Gęstości *a priori* $p(\omega)$, $p(\varphi_j)$, $p(\tau_j)$ odzwierciedlają założenia o możliwych wartościach parametrów i są identyczne, jak w modelu MSF-SBEKK (Osiewalski i Pajor, 2009). Wektor parametrów warunkowej wartości oczekiwanej dla r_t , δ , ma $n(n+1)$ -wymiarowy standardowy rozkład normalny, ucięty przez warunek (zwykle niewiążący *a posteriori*), by wartości własne macierzy Δ były wewnątrz koła jednostkowego w przestrzeni liczb zespolonych. Parametr φ_i procesu ukrytego $\{g_{it}, t \in Z\}$ ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją 100, ucięty do przedziału $(-1, 1)$; parametr τ_i ma rozkład wykładniczy o średniej 200. Wartości początkowe procesów ukrytych ustalamy na poziomie $g_{01} = g_{02} = g_{03} = 1$. Macierz odwrotna do A (w strukturze SBEKK) ma rozkład Wisharta o n stopniach swobody i średniej I_n ; β i γ mają łączny rozkład jednostajny na trójkącie zdefiniowanym warunkami: $\beta > 0$, $\gamma > 0$, $\beta + \gamma < 1$. Warunek początkowy dla H_t ma postać $H_0 = h_0 I_n$ gdzie h_0 jest parametrem o wykładniczym rozkładzie *a priori* ze średnią 1. Łącznie jest $1,5n(n+1) + 9$ parametrów.

Wiedza o wielkościach nieobserwowalnych, uzyskana po wglądzie w dane, zawarta jest w łącznym rozkładzie *a posteriori* o gęstości proporcjonalnej do (5):

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{g}_{11}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{T1}^{-1}, \mathbf{g}_{12}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{T2}^{-1}, \mathbf{g}_{13}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{T3}^{-1}, \boldsymbol{\theta} \mid r_1, \dots, r_T, \psi_0) \\
& \propto p(\omega) \left(\prod_{j=1}^3 p(\varphi_j) p(\tau_j) \right) \prod_{t=1}^T p(r_t, \mathbf{g}_{t1}^{-1}, \mathbf{g}_{t2}^{-1}, \mathbf{g}_{t3}^{-1} \mid \boldsymbol{\theta}, \psi_{t-1});
\end{aligned} \tag{7}$$

rozkład ten jest $[3T + 1,5n(n + 1) + 9]$ -wymiarowy, niestandardowy. Sposobem uzyskania jego charakterystyk jest metoda MCMC, tj. symulacja Monte Carlo za pomocą łańcucha Markowa o rozkładzie stacjonarnym z gęstością (7). Wykorzystujemy łańcuch Gibbsa, zbudowany przez sekwencyjne losowania z warunkowych rozkładów *a posteriori* o gęstościach postaci (notacja zakłada, że indeksy h, i, j są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, 3\}$):

$$\begin{aligned}
& p(\omega \mid \psi_0, r_1, \dots, r_T, \mathbf{g}_{11}, \dots, \mathbf{g}_{T1}, \mathbf{g}_{12}, \dots, \mathbf{g}_{T2}, \mathbf{g}_{13}, \dots, \mathbf{g}_{T3}, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \tau_1, \tau_2, \tau_3) \\
& \propto p(\omega) \prod_{t=1}^T (\det H_t)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t'\right)
\end{aligned} \tag{8}$$

– gęstość rozkładu $[1,5n(n+1)+3]$ -wymiarowego, niestandardowego (losowania wymagają stosowania algorytmu Metropolis i Hastingsa);

$$\begin{aligned}
& p(\varphi_j, \tau_j \mid \psi_0, r_1, \dots, r_T, \mathbf{g}_{11}, \dots, \mathbf{g}_{T1}, \mathbf{g}_{12}, \dots, \mathbf{g}_{T2}, \mathbf{g}_{13}, \dots, \mathbf{g}_{T3}, \omega, \varphi_h, \tau_h, \varphi_i, \tau_i) \\
& \propto p(\varphi_j) p(\tau_j) \prod_{t=1}^T f_N^1(\ln g_{jt} \mid \varphi_j, \ln g_{t-1,j}, \tau_j^{-1})
\end{aligned} \tag{9}$$

– gęstość standardowa, normalna-gamma, ucięta przez restrykcje $-1 < \varphi_j < 1$;

$$\begin{aligned}
& p(\mathbf{g}_{ij}^{-1} \mid \psi_0, r_1, \dots, r_T, \mathbf{g}_{th}^{-1}, \mathbf{g}_{it}^{-1}, \mathbf{g}_{11}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{t-1,1}^{-1}, \mathbf{g}_{t+1,1}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{T1}^{-1}, \\
& \mathbf{g}_{12}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{t-1,2}^{-1}, \mathbf{g}_{t+1,2}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{T2}^{-1}, \mathbf{g}_{13}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{t-1,3}^{-1}, \mathbf{g}_{t+1,3}^{-1}, \dots, \mathbf{g}_{T3}^{-1}, \boldsymbol{\theta}) \\
& \propto (\mathbf{g}_{ij}^{-1})^{(n_j/2)-1} \exp\left(-\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\Omega}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t'\right) f_N^1(\ln g_{ij}^{-1} \mid \mu_{ij}, \sigma_{ij}^2)
\end{aligned} \tag{10}$$

– gęstość niestandardowa, gdzie dla $t = 1, 2, \dots, T-1$

$$\mu_{ij} = \frac{\varphi_j}{1 + \varphi_j^2} (\ln g_{t-1,j}^{-1} + \ln g_{t+1,j}^{-1}), \quad \sigma_{ij}^2 = \frac{1}{\tau_j (1 + \varphi_j^2)},$$

a dla $t = T$: $\mu_{ij} = \varphi_j \ln g_{t-1,j}^{-1}$, $\sigma_{ij}^2 = \tau_j^{-1}$;

dobry pomocniczy mechanizm losowania w algorytmie Metropolis i Hastingsa jest zapewniony przez rozkład o gęstości

$$q(\mathbf{g}_{ij}^{-1}) = f_G(\mathbf{g}_{ij}^{-1} \mid a_{ij} + \frac{n_j}{2}, b_{ij} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}_t^{(j)} H_{t,jj}^{-1} (\boldsymbol{\varepsilon}_t^{(j)})'), \tag{11}$$

gdzie $a_{ij} = [\exp(\sigma_{ij}^2) - 1]^{-1}$, $b_{ij} = a_{ij} \exp(-\mu_{ij} - (\sigma_{ij}^2 / 2))$; gęstość (11) wykorzystuje informację o g_{ij} zawartą tylko w tej części wektora ε_t , która odpowiada aktywowi z grupy j ($j = 1, 2, 3$).

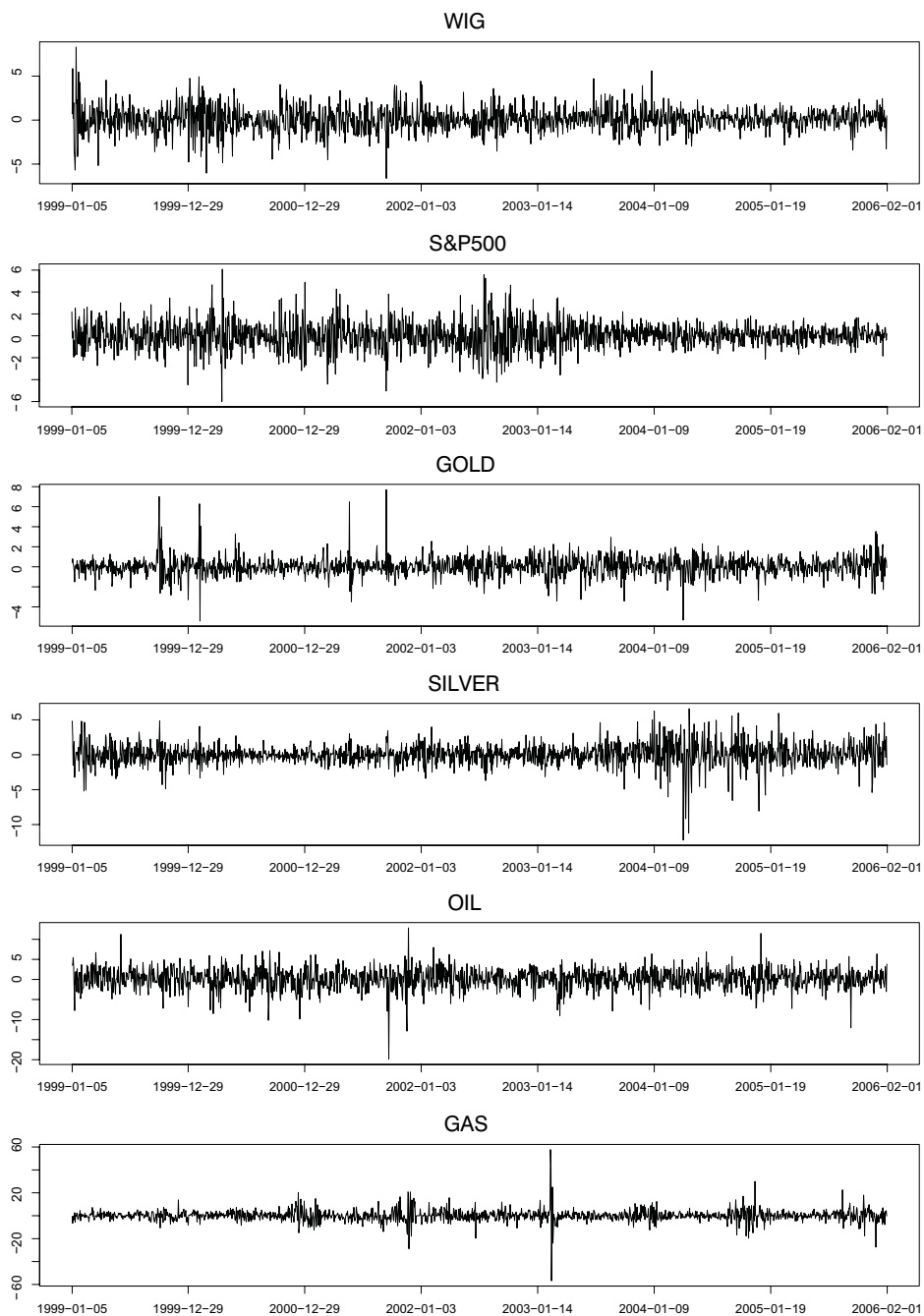
Sekwencyjne losowanie z powyższych rozkładów warunkowych (czyli próbnik Gibbsa) prowadzi — po dostatecznej liczbie losowań wstępnych — do próby zależnej z łącznego rozkładu *a posteriori* o niestandardowej gęstości (7). Na podstawie tej próby uzyskujemy dowolne charakterystyki tego rozkładu, czyli realizujemy wnioskowanie bayesowskie w sposób dokładny. Jednak wymiar wektora ω rośnie z kwadratem liczby szeregów czasowych, czyniąc losowanie Metropolisa i Hastingsa z rozkładu o gęstości (8) zadaniem zbyt trudnym już przy umiarkowanych wartościach n . Zatem Osiewalski (2009) proponuje, a Osiewalski i Pajor (2009) praktycznie stosują, zastąpienie estymacji parametrów macierzowych: δ — ocenami MNK z modelu VAR(1), A — empiryczną macierzą kowariancji reszt MNK. Ze względu na trudności z doбором właściwego mechanizmu pomocniczych losowań i szybko rosnący czas obliczeń, takie przybliżone podejście bayesowskie staje się niezbędne, gdy modelujemy łącznie więcej niż 5 lub 6 szeregów czasowych. Będzie ono w tej pracy porównane z dokładnym wnioskowaniem dla nowego modelu z trzema procesami ukrytymi.

3. ŁĄCZNE MODELOWANIE ZMIENNOŚCI SZEŚCIU SZEREGÓW CZASOWYCH

W tej części przedstawiamy wyniki bayesowskiego modelowania dziennych procentowych logarytmicznych stóp zwrotu (stóp zmian) sześciu szeregów czasowych łącznie. Dwa szeregi reprezentują indeksy giełdowe WIG i S&P500 (rynk akcji) i ten sam okres, co w poprzednich pracach (w celu zachowania porównywalności części wyników — zob. Osiewalski, Pajor, Pipień, 2007; Osiewalski i Pajor, 2009; Osiewalski i Osiewalski, 2011). Dwa szeregi pochodzą z rynków metali szlachetnych — dotyczą cen złota i srebra w tamtym okresie (*London Fix*, USD/oz); zob. Osiewalski i Osiewalski (2011). Dwa szeregi przedstawiają ceny ropy naftowej (*Brent Spot Price*, USD/Barrel) i gazu ziemnego (*Henry Hub Gulf Coast Natural Gas Spot Price*, USD/MMBTU).

Synchronizacja $n = 6$ szeregów pozostawiła $T = 1656$ obserwacji dla stóp zmian, które przedstawiono na Rys. 1. Przyjęto model hybrydowy (1)–(5) z 3 procesami ukrytymi ($n_1 = n_2 = n_3 = 2$). W Tabelach 1 i 2 zebrano statystyki opisowe danych.

Zmienność indeksów giełdowych, cen metali i cen surowców paliwowych jest wyraźnie inna. W stosunku do stóp zmian cen metali, stopy zmian indeksów z rynku akcji charakteryzują się zdecydowanie mniejszą (co do modułu) skośnością i kurtozą, są też słabo między sobą skorelowane. Słaba korelacja stóp zmian dotyczy też cen ropy i gazu, jednak rozproszenie obu tych stóp jest



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 1. Modelowane dzienne procentowe stopy zmian (8.01.1999–1.02.2006)

duże, a kurtoza w przypadku gazu jest ogromna. Warto wyjaśnić, że wielkość kurtozy w przypadku gazu ziemnego wynika ze skoku cenowego (z 8 do 22 USD/MMBTU), a następnie powrotu do wielkości go poprzedzającej, w dniach 23–27 lutego 2003. Według raportu *Staff Investigating Team (Federal Energy Regulatory Commission, 23 czerwca 2003)* było to podyktowane splotem wielu czynników destabilizujących równowagę popytu i podaży na rynku gazu. Z jednej strony zimny front okalający wschodnią część USA po bardzo mroźnej zimie spowodował znacznie większe zużycie gazu niż przewidywano na tę porę roku. Z drugiej, nie dość że rezerwy gazu zostały przez ową zimę w dużej mierze skonsumowane, to zimny front spowodował zamarznięcie części studni wydobywczych, przez co uniemożliwił wydobycie gazu w południowo-wschodniej części USA.

Tabela 1

Statystyki opisowe dziennych procentowych stóp zmian ($n = 6, T = 1656$)

szereg (stopy zmian)		średnia	odch. st.	skośność	kurtoza
WIG	8.01.1999–1.02.2006	0.0626	1.3686	0.0703	5.5488
S&P500		0.0018	1.2233	0.1160	5.0695
GOLD		0.0413	0.9540	0.6527	11.3989
SILVER		0.0415	1.5580	-0.6256	9.4357
OIL		0.1117	2.5474	-0.5465	6.9719
NAT.GAS		0.0873	5.1060	0.3954	28.3150

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 2

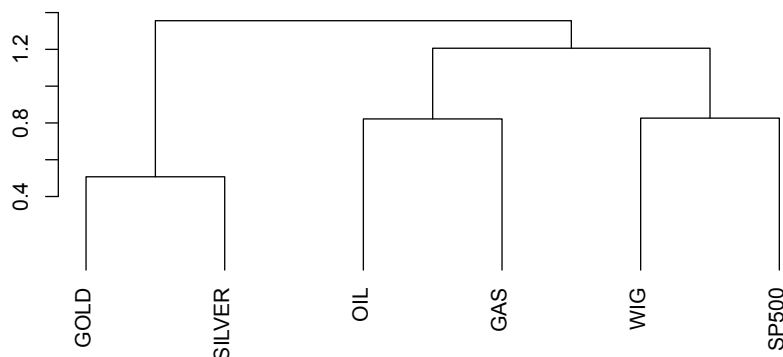
Współczynniki korelacji dziennych procentowych stóp zmian ($n = 6, T = 1656$)

	WIG	S&P500	GOLD	SILVER	OIL	NAT.GAS
WIG	1					
S&P500	0.1745	1				
GOLD	-0.0467	-0.0984	1			
SILVER	0.0546	-0.0417	0.4928	1		
OIL	0.0066	-0.0440	0.0743	0.0242	1	
NAT.GAS	-0.0124	-0.0149	0.0701	0.0273	0.1785	1

Źródło: opracowanie własne.

Aby zobrazować podobieństwo dynamiki stóp zmian posłużono się analizą skupień, dokonaną na podstawie współczynników korelacji podanych w Tabeli 2. Największe podobieństwo wykazywały w badanym okresie stopy zmian cen

złota i srebra (zob. Rys. 2); znacząco mniejsze cechowało stopy zmian indeksów giełdowych, tworzących drugie skupienie, oraz zmian cen ropy i gazu, tworzących skupienie trzecie. Występowanie tych trzech skupień w sposób nieformalny potwierdza zasadność użycia modelu z trzema procesami ukrytymi, po jednym dla pary o podobnej dynamice zmian.



Źródło: opracowanie własne.

Rysunek 2. Podobieństwo dziennych procentowych stóp zmian (metoda Warda)

W Tabeli 3 pokazujemy logarytmy dziesiętne czynnika Bayesa, uzyskane przez zastąpienie wartości brzegowych gęstości macierzy obserwacji ich symulacyjnymi ocenami Newtona i Raftery'ego. Wyniki wskazują, że pojedynczy proces ukryty to w rozważanym przypadku za mało, bo model MSF-SBEKK (na nim oparty) jest ok. 10^{118} razy mniej prawdopodobny *a posteriori* (przy równych szansach *a priori*) niż model obecnie proponowany. Jeśli do nowego modelu wprowadzamy *ad hoc* oceny MNK parametrów macierzowych (nie prowadzimy dla nich formalnego wnioskowania), to i tak nowy model — z taką silną (i niezbyt trafną) restrykcją na większość parametrów — jest ok. 10^{54} razy bardziej prawdopodobny *a posteriori* niż dokładnie szacowany model MSF-SBEKK. Cena pełnej bayesowskiej estymacji modelu z 3 procesami ukrytymi jest duża, bo czas obliczeń sięga granicy praktycznej stosowalności takiej specyfikacji, i to przy tylko 6 szeregach czasowych i liczbie obserwacji niewielkiej jak na dane dzienne. Nawet wstępne zastosowanie MNK dla większości parametrów nie skraca dostatecznie czasu obliczeń, co może stwarzać istotne ograniczenia dla wykorzystania modelu z 3 procesami ukrytymi. Trudno wyobrazić sobie jego użycie w analizie portfela 50 akcji, który rozważali Osiewalski i Pajor (2010, 2011), opisując zmienność za pomocą modelu MSF-SBEKK z ocenami MNK. Nasz nowy model może być jednak przydatny w badaniu efektu zarażania na niewielu rynkach, reprezentowanych przez główne ceny lub indeksy cenowe (jak w obecnym przykładzie).

Tabela 3

Bayesowskie porównanie hybrydowych modeli MSV dla 6 szeregów danych

Model VAR(1) + M_i	Liczba swobodnych parametrów (i zm. ukrytych)	$\log_{10}(B_{NOWY,i})$	czas obliczeń
NOWY (dokładnie)	72 (+3T)	0	26 h 3 min
NOWY (z MNK)	9 (+3T)	64	16 h 14 min
MSF-SBEKK typ I (dokładnie)	68 (+T)	118	7 h 53 min
MSF-SBEKK typ I (z MNK)	5 (+T)	155	2 h 32 min

Źródło: opracowanie własne.

Należy zwrócić uwagę na wartości oczekiwane (i — w nawiasach — odchylenia standardowe) *a posteriori* parametrów nowego modelu:

$$E(\delta') = \begin{bmatrix} \mathbf{0.073} \\ (0.027) \\ \mathbf{0.025} \\ (0.025) \\ \mathbf{0.010} \\ (0.018) \\ -\mathbf{0.015} \\ (0.027) \\ \mathbf{0.187} \\ (0.052) \\ \mathbf{0.079} \\ (0.072) \end{bmatrix}, \quad E(\Delta') = \begin{bmatrix} \mathbf{0.028} & \mathbf{0.282} & \mathbf{0.058} & \mathbf{0.023} & -\mathbf{0.002} & -\mathbf{0.010} \\ (0.024) & (0.029) & (0.035) & (0.019) & (0.011) & (0.005) \\ \mathbf{0.028} & -\mathbf{0.051} & \mathbf{0.040} & -\mathbf{0.024} & -\mathbf{0.003} & -\mathbf{0.002} \\ (0.021) & (0.026) & (0.032) & (0.017) & (0.010) & (0.005) \\ \mathbf{0.023} & -\mathbf{0.011} & -\mathbf{0.038} & -\mathbf{0.001} & \mathbf{0.008} & \mathbf{0.004} \\ (0.014) & (0.015) & (0.029) & (0.016) & (0.007) & (0.003) \\ \mathbf{0.035} & \mathbf{0.003} & \mathbf{0.254} & -\mathbf{0.202} & \mathbf{0.013} & -\mathbf{0.001} \\ (0.019) & (0.021) & (0.043) & (0.029) & (0.010) & (0.005) \\ \mathbf{0.031} & \mathbf{0.070} & -\mathbf{0.044} & \mathbf{0.019} & \mathbf{0.022} & -\mathbf{0.007} \\ (0.043) & (0.047) & (0.057) & (0.034) & (0.026) & (0.014) \\ \mathbf{0.037} & \mathbf{0.036} & -\mathbf{0.143} & \mathbf{0.002} & \mathbf{0.004} & \mathbf{0.013} \\ (0.060) & (0.069) & (0.092) & (0.053) & (0.038) & (0.026) \end{bmatrix},$$

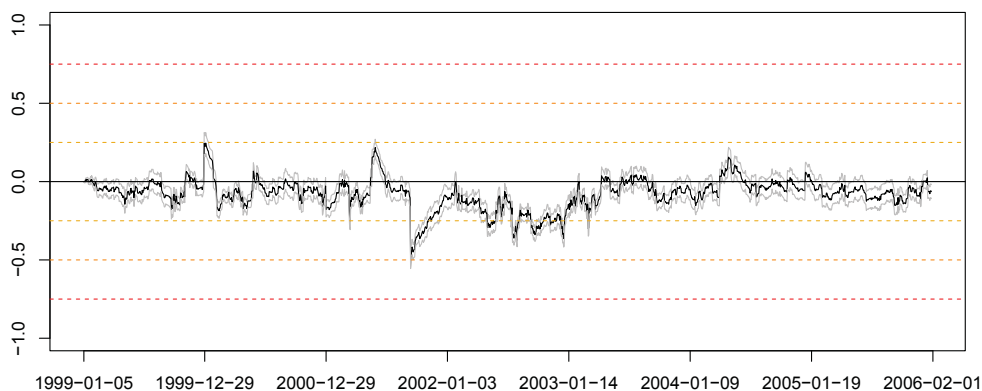
$$E(\varphi') = \begin{bmatrix} \mathbf{0.977} \\ (0.014) \\ \mathbf{0.503} \\ (0.071) \\ \mathbf{0.613} \\ (0.102) \end{bmatrix}, \quad E[(\tau^{-1})'] = E[(\sigma^2)'] = \begin{bmatrix} \mathbf{0.012} \\ (0.005) \\ \mathbf{0.482} \\ (0.072) \\ \mathbf{0.281} \\ (0.069) \end{bmatrix},$$

$$E(A) = \begin{bmatrix} \mathbf{1.913} & \mathbf{0.312} & -\mathbf{0.054} & \mathbf{0.027} & -\mathbf{0.027} & -\mathbf{0.022} \\ (0.655) & (0.127) & (0.041) & (0.060) & (0.126) & (0.188) \\ & \mathbf{1.454} & -\mathbf{0.064} & -\mathbf{0.031} & -\mathbf{0.123} & -\mathbf{0.095} \\ & (0.518) & (0.037) & (0.054) & (0.113) & (0.163) \\ & & \mathbf{0.469} & \mathbf{0.329} & \mathbf{0.119} & \mathbf{0.144} \\ & & (0.044) & (0.045) & (0.071) & (0.109) \\ & & & \mathbf{1.026} & -\mathbf{0.052} & \mathbf{0.060} \\ & & & (0.104) & (0.107) & (0.162) \\ & & & & \mathbf{5.192} & \mathbf{1.634} \\ & & & & (0.474) & (0.369) \\ & & & & & \mathbf{10.298} \\ & & & & & (1.034) \end{bmatrix},$$

$$E(\beta) = \mathbf{0.021} \quad (0.003), \quad E(\gamma) = \mathbf{0.943} \quad (0.008), \quad E(h_0) = \mathbf{2.381} \quad (0.710);$$

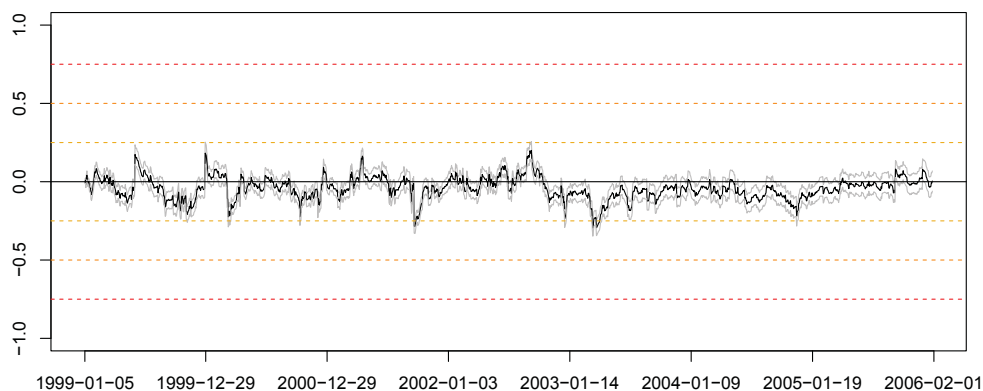
pogrubioną czcionką zapisano wartości oczekiwane tych parametrów, w przypadku których wartość zerowa nie mieści się w przedziale między kwantylami *a posteriori* na poziomie 0.025 i 0.975 (w tym sensie są to parametry istotnie różne od zera).

Skupianie się istotnych parametrów macierzy A w osobne bloki, odpowiadające rynkom akcji, metali i surowców paliwowych, może nasuwać przypuszczenie, że łączne modelowanie wybranych sześciu szeregów jest zbędne. Z drugiej strony, elementy macierzy Δ nie potwierdzają tego przypuszczenia — wpływ opóźnionej stopy zmian ceny ropy naftowej na bieżącą stopę zmian indeksu S&P500 wydaje się istotny. W celu formalnej weryfikacji tego przypuszczenia oszacowano trzy odrębne modele MSF–SBEKK; w tym przypadku zakłada się całkowitą niezależność. Okazuje się, że łączny model hybrydowy (z trzema procesami ukrytymi dla sześciu szeregów) jest ok. $10^{5.5}$ razy bardziej prawdopodobny *a posteriori* niż trzy odrębne modele. Porównując to z wynikami w Tabeli 3 stwierdzamy z kolei, że trzy odrębne modele są ok. $10^{112.5}$ razy bardziej prawdopodobne niż łączny model z jednym procesem ukrytym. Okazuje się zatem, że odrębne procesy ukryte są ważniejsze dla wyjaśnienia zmienności tych szeregów niż łączne modelowanie z jednym tylko procesem ukrytym. Model najlepszy wśród rozważanych zapewnia i łączny opis, i pewną odrębność. Jego adekwatność wyjaśniają przebiegi warunkowych współczynników korelacji między dziennymi stopami zmian indeksu S&P500 i cen złota lub ropy naftowej; na Rys. 3 i 4 podano wartości oczekiwane (\pm dwa odchylenia standardowe) *a posteriori*. Warunkowe korelacje pozostają niezerowe (dodatnie lub, częściej, ujemne) przez długie okresy, więc zmienność na różnych rynkach nie jest niezależna. Natomiast średnia wartość oczekiwana *a posteriori* warunkowych współczynników korelacji (z S&P500) jest równa dla cen złota -0.0806 (przy średnim odchyleniu



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 3. Wartości oczekiwane *a posteriori* warunkowego współczynnika korelacji stóp zmian indeksu S&P500 oraz ceny złota

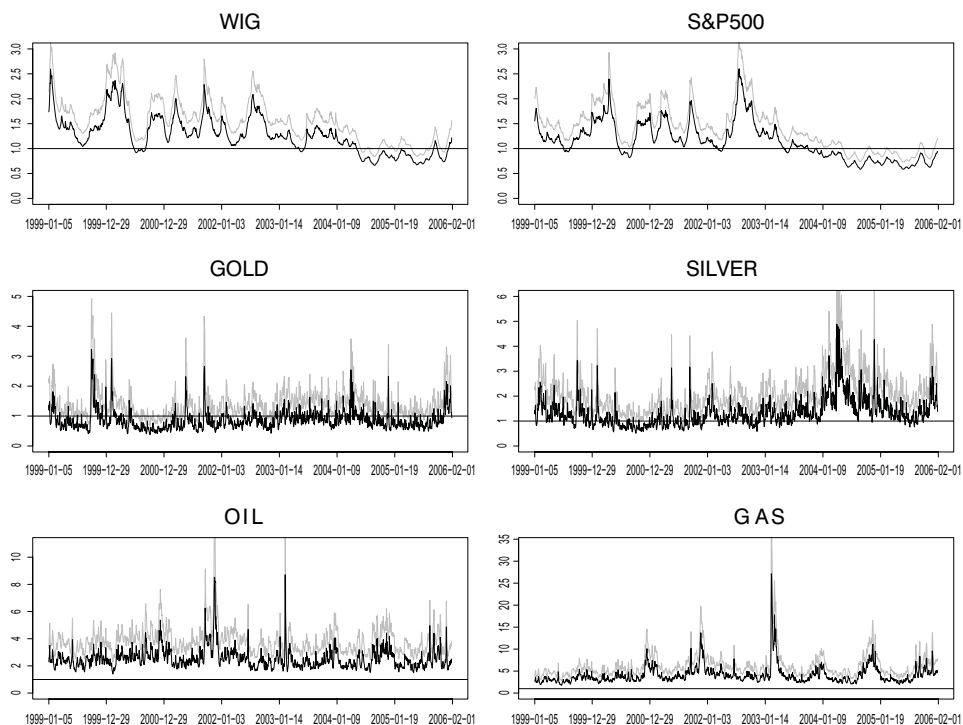


Źródło: opracowanie własne.

Rys. 4. Wartości oczekiwane *a posteriori* warunkowego współczynnika korelacji stóp zmian: indeksu S&P500 oraz ceny ropy naftowej

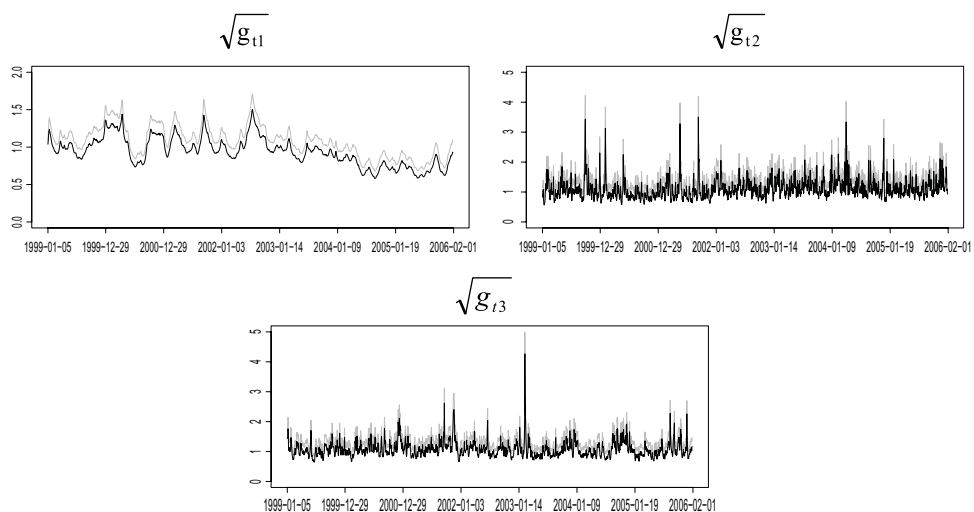
standardowym *a posteriori* równym 0.1001), więc nie różni się znacząco od empirycznej korelacji obu szeregów (-0.0984); w przypadku ropy mamy -0.0438 (0.0755) wobec bardzo podobnej, bliskiej zeru empirycznej korelacji (-0.0440). Wnioskowanie o warunkowych współczynnikach korelacji między stopami zmian cen na rozważanych rynkach potwierdza, że są między nimi zwykle dość słabe, ale jednak istotne zależności. Znaczące ujemne skorelowanie między indeksem S&P500 oraz cenami złota i ropy zachodziło w II połowie 2001 roku, świadcząc o istniejącej wtedy możliwości dywersyfikacji ryzyka inwestycji.

Na Rys. 5 pokazano wartości oczekiwane *a posteriori* warunkowych odchyłeń standardowych, a na Rys. 6 ich składowej ukrytej $\sqrt{g_{ii}}$ ($i=1,2,3$). Zmienność indeksów giełdowych (mierzona warunkowym odchyleniem standardowym) jest znacznie mniej wahliva niż zmienność cen metali. Bardziej nieregularny jest przebieg drugiego procesu ukrytego, z gwałtownymi wybuchami powyżej wyjściowego poziomu 1. Duże różnice w przebiegu procesów ukrytych są zgodne z wartościami oczekiwanymi *a posteriori* ich parametrów, bardzo od siebie odległymi. Dla φ_1 mamy 0.977, tj. silną autokorelację procesu $\ln(g_{t1})$, o bezwarunkowej wariancji ok. $0.012/(1-0.977^2) = 0.264$. Dla φ_2 mamy 0.503, co oznacza słabą autokorelację $\ln(g_{t2})$, przy wariancji ok. 0.645, czyli relatywnie dużej. Dla φ_3 mamy 0.613, umiarkowaną autokorelację $\ln(g_{t3})$, przy wariancji ok. 0.450, czyli też umiarkowanej. Procesy ukryte mają istotny udział w opisie zmienności sześciu szeregów czasowych, a odmienność ich przebiegu wyjaśnia ogromną przewagę nowego modelu hybrydowego nad modelem MSF-SBEKK (z jednym procesem ukrytym dla wszystkich szeregów).



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 5. Wartości oczekiwane (+ dwa odchylenia standardowe) *a posteriori* warunkowych odchyłeń standardowych



Źródło: opracowanie własne.

Rys. 6. Wartości oczekiwane (+ odchylenie standardowe) *a posteriori* pierwiastków zmiennych ukrytych

4. UWAGI KOŃCOWE

Celem pracy była prezentacja nowego wielowymiarowego hybrydowego modelu stochastycznej zmienności (lub wariancji), jego bayesowskiej analizy statystycznej i praktycznej przydatności w łącznym opisie zmienności cen na różnych rynkach. Nowy model, wykorzystujący warunkową strukturę korelacyjną SBEKK i trzy procesy ukryte, pozwala na adekwatne i oszczędne ujęcie dynamiki stóp zwrotu dla wielu aktywów, które można podzielić w sposób naturalny na trzy grupy.

Dalsze badania powinny mieć na celu uogólnienie modelu na dowolną (choć w praktyce niewielką) liczbę odrębnych grup aktywów, a także do sprawdzenia jego przydatności w przypadku dużej łącznej liczby aktywów. W szczególności ważny jest wstępny podział portfela na kilka grup aktywów o podobnej dynamice cen, a następnie porównanie analizy ryzyka dużego portfela, przeprowadzanej za pomocą modelu z jednym procesem ukrytym (zob. Osiewalski i Pajor, 2010, 2011) oraz za pomocą specyfikacji o kilku procesach ukrytych. Innym kierunkiem możliwych zastosowań jest analiza powiązań zmienności na wielu rynkach (finansowych, metali, surowców energetycznych i innych) w okresie ostatniego kryzysu o charakterze globalnym. Odmiennym polem badań metodycznych i empirycznych jest bayesowskie porównanie najnowszych specyfikacji MSV: naszych hybrydowych (zawierających elementy struktur MGARCH) oraz tych, które zaproponowali Philipov i Glickman (2006) oraz Gouriéroux, Jasiak i Sufana (2009).

PODZIĘKOWANIA

Autorzy wyrażają szczególną wdzięczność Annie Pajor (za wprowadzanie w niełatwą tematykę modeli MSV) oraz Błażejowi Mazurowi (za zwrócenie uwagi na ograniczenia modelu MSF-SBEKK w opisie zmienności niejednorodnych portfeli).

LITERATURA

- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J.V.K. 2006. *Multivariate GARCH models: A survey*, "Journal of Applied Econometrics" 21, 79–109.
- Gouriéroux C., Jasiak J., Sufana R. 2009. *The Wishart Autoregressive process of multivariate stochastic volatility*, "Journal of Econometrics" 150, 167–181.
- Osiewalski J. 2009. *New hybrid models of multivariate volatility (a Bayesian perspective)*, "Przegląd Statystyczny (Statistical Review)" 56, 15–22.
- Osiewalski J., Osiewalski K. 2011. *Modele hybrydowe MSV-MGARCH z dwoma procesami ukrytymi*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie — seria Finanse” (w druku).

- Osiewalski J., Pajor A. 2007. *Flexibility and parsimony in multivariate financial modelling: a hybrid bivariate DCC–SV model* [w:] *Financial Markets. Principles of Modeling, Forecasting and Decision-Making* (FindEcon Monograph Series No. 3, edited by W.Milo and P.Wdowiński), Łódź University Press, Łódź, 11–26.
- Osiewalski J., Pajor A. 2009. *Bayesian analysis for hybrid MSF–SBEKK models of multivariate volatility*, “Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” 1, 179–202.
- Osiewalski J., Pajor A. 2010. *Bayesian Value-at-Risk for a portfolio: multi- and univariate approaches using MSF–SBEKK models*, “Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics” 2, 253–277.
- Osiewalski J., Pajor A. 2011. *Bayesian Value-at-Risk and Expected Shortfall for a large portfolio (multi- and univariate approaches)*, “Acta Physica Polonica A” (w druku).
- Osiewalski J., Pajor A., Pipień M. 2007. *Bayesian comparison of bivariate GARCH, SV and hybrid models* [w:] “MACROMODELS’2006, Proceedings of the 33rd International Conference” (edited by W.Welfe and A.Welfe), Absolwent, Łódź, 247–277.
- Pajor A. 2010. *Wielowymiarowe procesy wariancji stochastycznej w ekonometrii finansowej — ujęcie bayesowskie*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie, Kraków.
- Philipov A., Glickman M. 2006. *Multivariate Stochastic Volatility Via Wishart Processes*, “Journal of Business and Economic Statistics” 24(3), 313–328.