

Kordula Świątorzecka

Ontologiczny dowód Gödla z ograniczoną redukcją modalności

Zakres nazwy „logika” jest oczywiście sprawą konwencji, ale nazywanie logiką teorii prowadzącej do mocnych rozstrzygnięć egzystencjalnych nasuwa poważne wątpliwości. [Lepiej byłoby] powiedzieć, że dowód Lematu Leibniza [zgodnie z którym istnienie bytu najdoskonalszego nie jest niemożliwe] i dalsze kroki [argumentu ontologicznego] odbywają się w ramach pewnej teorii formalnej dotyczącej pojęć modalnych, a nie mają charakter czysto logiczny.

J. Woleński, *Gaunilon dzisiaj*

Słowa kluczowe: *dowód ontologiczny, K. Gödel, dowód na istnienie Boga, teodycea, formalizacja*

Wybór rachunku o odpowiedniej mocy dedukcyjnej, na którym chcemy oprzeć jakąś teorię, oraz wskazanie jej aksjomatów specyficznych są uzależnione od tego, co jesteśmy gotowi uznać za specyfikę charakteryzowanych przez tę teorię pojęć w klasie dopuszczalnych jej interpretacji. Od takich rozstrzygnięć zależy także pragmatyczna wartość konstruowanej teorii – to one decydują o kwalifikacjach pragmatycznych aksjomatów, m.in. w związku z ich logicznym lub pozalogicznym statusem. Mimo że nie istnieją ogólne kryteria „odpowiednich” wyborów w tych sprawach, to w niektórych sytuacjach daje się ustalić przynajmniej jakieś „graniczne” przypadki, które trywializują analizowany problem lub uniemożliwiają jego rozwiązanie, a niekiedy zbędnie rozstrzygają kwestie z nim zasadniczo niezwiązane. Ich wskazywanie jest przy tym o tyle uzasadnione, że można w ten sposób istotnie zawęzić spektrum akceptowalnych formalizacji podnoszonego zagadnienia.

Prezentowane rozważania są efektem poszukiwania „odpowiedniej” i zarazem możliwie słabej podstawy formalnej ontologicznego argumentu na konieczne istnienie Boga, naszkicowanego przez K. Gödla.

Dotychczasowe modalne rekonstrukcje notatki Gödla z 1970 roku zatytułowanej *Ontologischer Beweis* odwołują się najczęściej do uzupełnienia D. Scotta i opierają argumentację Gödla na różnych kwantyfikatorowych rozszerzeniach logiki modalnej $S5$ lub B . Bezsporne jest też, że zamierzoną przez samego autora charakterystyką modalności był właśnie system $S5$. Znaczenie funktorów modalnych w $S5$ (i B) umożliwia określoną konstrukcję argumentu ontologicznego, jednak z drugiej strony może być uważane także za źródło słabości opartej na nim teorii Absolutu. Gdy taką teorię zechcemy wzbogacić i wziąć pod uwagę w szczególności możliwe egzystencjalne relacje między Absolutem a innymi (*przygodnymi*) indywiduami, modalności \square i \diamond wydają się nie podlegać redukcji charakterystycznej dla systemów $S5$ i B ¹.

Standardowe rozszerzenie $S5$ lub B do logiki kwantyfikatorowej uwikłane jest w kolejne znane trudności. W odpowiednio rozbudowanej standardowej semantyce światów możliwych rozstrzyga się, że modele tych logik mają stałe uniwersum indywiduów, i to ograniczenie dziedziczą interpretacje oparte na nich teorii². Tymczasem tego rodzaju rozstrzygnięcie nie ma związku z zasadniczym problemem rozważanym w formalizmie Gödla³.

W poniżej zaproponowanej wersji argumentu Gödla ograniczymy redukcję modalności $S5$ do wybranego specyficznego kontekstu dotyczącego istnienia Absolutu. Logiką, która pozwala zachować konstrukcję argumentacji Gödla, okaże się system $S4$. Otrzymaną teorię skojarzymy z semantyką światów możliwych z możliwie zmiennymi uniwersami. Istnienie indywiduów wyrazimy za pomocą kwantyfikatora \exists zinterpretowanego aktualistycznie, bez użycia pierwotnego predykatu istnienia.

1. Argumentacja Gödla i jej prototyp – formalizm C. Hartshorne’a

Komentatorzy formalizacji Gödla są zgodni w kwestii filozoficznych odniesień naszkicowanego przez niego argumentu⁴. Jak powszechnie się uważa, główną

¹ Odnośnie tej redukcji można próbować na nowo podjąć krytykę w stylu Gaunilona – tym razem (dla $S5$) kwestionowalibyśmy to, że możliwość koniecznego istnienia dowolnego obiektu najdoskonalszego w jakiejś klasie („Najdoskonalszej Wyspy”) pociąga za sobą jego konieczne istnienie.

² Taką semantykę dla swoich wersji argumentu Gödla przyjmują np. J. Czermak (2002) i P. Hájek (2002).

³ Interpretacje M. Fittinga (2002) i S. Kovača (2003) dopuszczają zmienność uniwersum indywiduów.

⁴ Szczegółowe ich omówienie można znaleźć np. w: Czermak 2002.

inspirację stanowił dla Gödla wykład Leibnizjańskiej filozofii Boga. Podobnie jak Leibniz, Gödel oparł swój dowód na pierwotnym pojęciu pozytywności (*positiveness*), które koresponduje z Leibnizjańskim *perfectio*, i przejął ideę Boga jako *subiectum omnium perfectionum*. Drugie podobieństwo do koncepcji Leibniza zasadza się na samej strukturze argumentacji, odnotowanej za pomocą współczesnej logiki modalnej już przed Gödlem przez C. Hartshorne'a. Gödel znał próby Hartshorne'a; zachował też zasadniczą konstrukcję jego formalizmu, ale swoją argumentację istotnie rozbudował, uzasadniając odpowiedniki dwóch zasadniczych aksjomatów Hartshorne'a.

Formalizacja Hartshorne'a (1962) jest sformułowana w języku zdaniowym z klasycznymi funktorami prawdziwościowymi, operatorami modalnymi \Box , \Diamond , do którego dodano stałą zdaniową:

$\alpha^* =: \text{Byt najdoskonalszy istnieje.}$

Za podstawę formalną przyjmuje się zdaniową logikę *S5*, która powstaje przez rozszerzenie klasycznej logiki zdaniowej o aksjomaty o następujących postaciach:

(K) $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$

(T) $\Box A \rightarrow A$

(S) $\Diamond \Box A \rightarrow \Box A$

(\Diamond/\Box) $\Diamond A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$

oraz regułę wprowadzania konieczności:

(Nec) $A = \Box A.$

Hartshorne używa w swojej formalizacji implikacji ścisłej (\Rightarrow), którą dalej będziemy eliminować na podstawie równoważności:

(\Rightarrow/\Box) $(A \Rightarrow B) \leftrightarrow \Box (A \rightarrow B)$

Aksjomatami specyficznymi formalizacji Hartshorne'a są następujące dwa zdania:

(LA_H) $\alpha^* \Rightarrow \Box \alpha^*$

(*Lemat Anzelma: Jeżeli najdoskonalszy byt istnieje, to istnieje koniecznie*)

(LL_H) $\neg \Box \neg \alpha^*$

(*Lemat Leibniza: Istnienie bytu najdoskonalszego nie jest niemożliwe*)

Dowód głównej tezy o koniecznym istnieniu bytu najdoskonalszego, korespondujący z argumentacją Gödla, wygląda następująco:⁵

TH. $\Box \alpha^*$

⁵ Omówienie oryginalnego dowodu Hartshorne'a i logik, na których można go oprzeć, prezentuje J. Perzanowski (1994a).

Dowód:

1. $\diamond\alpha^*$ [$LL_H, (\diamond/\square)$]
2. $\square(\alpha^* \rightarrow \square\alpha^*)$ [$LA_H, (\Leftrightarrow/\square)$]
3. $\diamond\alpha^* \rightarrow \diamond\square\alpha^*$ [2, K]
4. $\diamond\square\alpha^* \rightarrow \square\alpha^*$ [(5)]
5. $\diamond\alpha^* \rightarrow \square\alpha^*$ [3, 4]
6. $\square\alpha^*$ [5, 1]

Uprowadzając systematyczną prezentację Gödla i Hartshorne'a formalizmu, odnotujemy w nim odpowiedniki *Lematu Anzelma* i *Lematu Leibniza* (wyrażenie Gx czytamy: x jest Bogiem):

(LA) $\square(\exists_x Gx \rightarrow \square\exists_x Gx)$
(Istnienie Boga pociąga za sobą Jego konieczne istnienie)

(LL) $\diamond\exists_x Gx$
(Istnienie Boga jest możliwe)

Podobieństwo argumentacji Gödla i Hartshorne'a w kluczowym fragmencie jest oczywiste. Wykorzystując aparat logiki zdaniowej $S5$, możemy uzyskać główną tezę argumentacji Gödla w taki sam sposób, jak TH :

TG. $\square\exists_x Gx$
(Konieczne jest to, że Bóg istnieje)

Jak już powiedzieliśmy, formalizm Gödla jest pod wieloma względami bogatszy od teorii Hartshorne'a. Gödel uzasadnia lematy LA i LL , chcąc w ten sposób zrealizować znaną ideę Leibniza. Po pierwsze, stara się naprawić błąd w argumentacji Kartezjusza wielokrotnie wskazywany przez Leibniza, a polegający na braku uzasadnienia jednej z kluczowych przesłanek, zgodnie z którą idea Boga jako podmiotu wszystkich doskonałości jest możliwa⁶. Po drugie, w teorii Gödla zyskuje uzasadnienie także druga przesłanka argumentacji Kartezjańskiej – sam lemat Anzelma. Aby uzupełnić dowód ontologiczny, Gödel przyjmuje aksjomaty charakteryzujące kluczowe pierwotne pojęcie doskonałości (*perfekcji*), oraz definicję Boga jako *podmiotu wszystkich perfekcji i kwalifikacji koniecznego istnienia*. W strukturę dowodów LA i LL są także istotnie uwikłane modalności \square i \diamond , jednak nie w związku z charakterystycznymi prawami $S5$ lub B , i ten fakt stwarza okazję do podjęcia próby konstrukcji modalnie słabszej wersji formalizmu Gödla.

⁶ Odniesienia źródłowe i komentarz J. Perzanowskiego znaleźć można w: Leibniz 1994: 67–76.

2. Wersja $S4$ formalizacji Gödla – teoria TG_{S4}

Prezentowaną teorię wyrazimy w języku, do którego słownika należą:

(i) zmienne indywidualowe (IV): x, y, z, \dots ; (ii) zmienne predykatowe pierwszego rzędu (PV): φ, ψ, \dots ; (iii) stałe pierwszego rzędu: G, E czytanie odpowiednio: ... jest Bogiem, ... koniecznie istnieje; (iv) stała predykatowa drugiego rzędu P – własność ... jest pozytywna; (v) symbole logiczne: $\neg, \bar{\neg}, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, =$ (identyczność pierwszego rzędu), \square, \diamond i (vi) nawiasy.

Termy predykatowe (PT) i formuły (FOR) są zdefiniowane indukcyjnie:

- (i) $G, E \in PT, PV \subset PT$
- (ii) jeżeli $\tau \in PT$, to $\bar{\tau} \in PT$
- (iii) jeżeli $x \in IV, \tau \in PT$, to $\tau x \in FOR^7$
- (iv) jeżeli $x, y \in IV$, to $x = y \in FOR$
- (v) jeżeli $\tau \in PT$, to $P(\tau) \in FOR$
- (vi) jeżeli $A, B \in FOR, x \in IV, \varphi \in PV$, to:
 $\neg A, (A \wedge B), (A \vee B), (A \rightarrow B), (A \leftrightarrow B), \forall_x A, \exists_x A, \forall_\varphi A, \exists_\varphi A, \square A, \diamond A \in FOR$

Do PT i FOR należą wyłącznie wyrażenia opisane przez powyższe warunki.

Zbiór wolnych zmiennych indywidualowych w formule A oznaczmy: $FIV(A)$,
 zbiór wolnych zmiennych predykatowych w A : $FPV(A)$.

Logika, na której oprzemy teorię TG_{S4} , jest wyznaczona przez:

- tautologie klasycznej logiki zdaniowej
- aksjomaty logiki predykatów pierwszego i drugiego rzędu o następujących postaciach:
 (APred1) $\forall_x A \rightarrow A_y^x$
 (APred2) $\forall_\varphi A \rightarrow A_\tau^\varphi$

Wyrażenie A_y^x (odpowiednio: A_τ^φ) powstaje z A przez wstawienie w miejsce wszystkich wolnych wystąpień zmiennej x (odpowiednio: φ) zmiennej y (odpowiednio: termu τ).

$$(\exists/\forall 1) \exists_x A \leftrightarrow \neg \forall_x \neg A$$

$$(\exists/\forall 2) \exists_\varphi A \leftrightarrow \neg \forall_\varphi \neg A$$

- aksjomaty dla identyczności pierwszego rzędu:

$$(Aid1) x = x$$

$$(Aid2) x = y \wedge A \rightarrow A [x/y]$$

⁷ Kontekst decyduje o przedmiotowym lub metajęzykowym użyciu niektórych zmiennych.

(Formuła A $[x/y]$ powstaje z A w wyniku zastąpienia niektórych wolnych egzemplarzy zmiennej x zmienną y).

- aksjomaty zdaniowej logiki modalnej $S4$:
 - (K) $\Box (A \rightarrow B) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box B)$
 - (T) $\Box A \rightarrow A$
 - (4) $\Box A \rightarrow \Box \Box A$
 - ($\Diamond \Box$) $\Diamond \Box A \leftrightarrow \neg \Box \neg A$
- oraz pierwotne reguły wnioskowania:
 - (MP) $A, A \rightarrow B = B$
 - (RPred1) $A \rightarrow B = A \rightarrow \forall_x B$, gdzie $x \notin FIV(A)$
 - (RPred2) $A \rightarrow B = A \rightarrow \forall_\varphi B$, gdzie $\varphi \notin FPV(A)$
 - (Nec) $A = \Box A$

Do zbioru tez teorii TG_{S4} zaliczymy ponadto:

- podstawienia schematu definicyjnego:
 - (C1) $\bar{\tau} x \leftrightarrow \neg \tau x$
(x posiada dopełnienie własności τ wtw, gdy x nie posiada τ)
 - (C2) $Gx \leftrightarrow \forall_\varphi (P(\varphi) \rightarrow \varphi x)$
(Bóg jest podmiotem wszystkich własności pozytywnych)
 - (C3) $Ex \leftrightarrow \forall_\varphi (\varphi \text{Ess. } x \rightarrow \Box \exists_x \varphi x)$
($\varphi \text{Ess. } x$ czytamy: własność φ jest istotą x -a)
(x koniecznie istnieje wtw, gdy każda jego istotna własność z konieczności przysługuje czemuś)

Wyrażenie $\tau \text{Ess. } x$ jest metajęzykowym skrótem dla formuły:

- $\tau x \wedge \forall_\psi (\psi x \rightarrow \Box \forall_x (\tau x \rightarrow \psi x))$
- aksjomaty specyficzne:
 - (A1) $P(\bar{\tau}) \leftrightarrow \neg P(\tau)$
(Dowolna własność albo jej dopełnienie są pozytywne)
 - (A2) $P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)$
(Bycie własnością pozytywną jest konieczne)
 - (A3) $P(E)$
(Konieczne istnienie jest pozytywne)
 - (A4) $\Box (P(\varphi) \wedge \Box \forall_x (\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow P(\psi))$
(Konieczne jest, by każda własność, którą z konieczności pociąga dowolna własność pozytywna, była także pozytywna)
 - (A5) $P(G)$
(Własność bycia Bogiem jest pozytywna)
 - (A6) $\Diamond \Box \exists_x Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx$
(Jeżeli możliwe jest to, że koniecznie istnieje Bóg, to Bóg istnieje z konieczności)

W komentarzu do naszej formalizacji zwróćmy uwagę na następujące punkty.

1. Przyjmujemy słabszą wersję charakterystyki predykatu identyczności. Gödel używa w swojej notatce symbolu $=$ w kontekście ze zmiennymi indywidualnymi, ale nie wskazuje na preferowane (słabe lub mocne) jego znaczenie (niektóre konsekwencje przyjęcia każdego z nich w wersji Scotta opisałam w: Świątorzecka 2012).
2. Zakładaną logikę osłabiamy także przez to, że nie bierzemy pod uwagę wszystkich podstawień schematu definicyjnego, ale tylko te, które wprowadzają: $\bar{\tau}$, G i E . W naszej słabej wersji nie potrzebujemy operatora λ i wykluczamy możliwość uzyskania ewentualnego „krachu modalności” – na gruncie naszej teorii nie jest tezą każde podstawienie implikacji $A \rightarrow \Box A$ (Kwestia możliwych sposobów otrzymania takiego efektu w różnych uzupełnieniach notatki Gödla jest szeroko dyskutowana za sprawą H. Sobela z 1987 roku. W argumentacji Sobela kluczowe jest zastosowanie operatora λ do formuł domkniętych przy jednoczesnym braku ograniczeń stosowalności reguły (Nec); por. Kovac 2003).
3. Charakterystyka modalności w ramach $S4$ wymaga wzmocnienia oryginalnego aksjomatu:

$$(A04) P(\varphi) \wedge \Box \forall_x(\varphi x \rightarrow \psi x) \rightarrow P(\psi)$$

do jego koniecznościowego domknięcia (A4).

Pozostałe aksjomaty specyficzne oryginalnej wersji formalizmu są równoważne swoim koniecznościowym domknięciom już na gruncie $S4$.

Niech $=^*$ oznacza inferencję bez (Nec). Odnotujmy, że:

Fakt 1. Dla każdego aksjomatu specyficznego (A_i):

$$TG_{S4} =^* (A_i) \rightarrow \Box (A_i).$$

Dowód:

Dla (A_i) =: (A1) mamy: $(P(\bar{\tau}) \leftrightarrow \neg P(\tau)) \leftrightarrow \Box (P(\bar{\tau}) \rightarrow \neg P(\tau))$

Niech A =: $P(\bar{\tau})$ oraz B =: $P(\varphi)$. Wówczas:

1. $A \leftrightarrow \neg B$ [(A1)]
2. $(\neg \Diamond B \wedge \Box A) \vee (\Box B \wedge \neg \Diamond A)$ [(A2), (T), (\Diamond/\Box), 1]
3. $\Box (\neg B \wedge A) \vee \Box (B \wedge \neg A)$ [(K), (\Diamond/\Box), 2]
4. $\Box (A \leftrightarrow \neg B)$ [(K), 3]

Dla (A_i) =: (A2) mamy: $(P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi)) \rightarrow \Box (P(\varphi) \rightarrow \Box P(\varphi))$

Skorzystamy z tego, że:

$$(\star) \Diamond P(\varphi) \rightarrow P(\varphi)$$

Niech $A =: P(\varphi)$. Mamy:

1. $A \rightarrow \Box A$ [(A2)]
2. $\Diamond A \rightarrow \Box A$ [\star , 1]
3. $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Diamond A$ [S4]
4. $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ [S4]
5. $\Diamond \Diamond A \rightarrow \Box \Box A$ [2, 3, 4]
6. $\Box \neg \Diamond A \vee \Box \Box A$ [(\Diamond/\Box) , 5]
7. $\Box(\neg \Diamond A \vee \Box A)$ [(K), 6]
8. $\Box(\Diamond A \rightarrow \Box A)$ [7]
9. $\Box(A \rightarrow \Box A)$ [\star , (T), 8]

Dla $(Ai) =: (A3)$ i $(A5)$ implikacje postaci $(Ai) \rightarrow \Box(Ai)$ otrzymujemy na podstawie (A2).

Dla $(Ai) =: (A6)$ użyjemy tautologicznego schematu S4:

$$(\star\star) \Box A \vee \Box B \leftrightarrow \Box(\Box A \vee \Box B)$$

Teraz niech $A =: \exists_x Gx$. Mamy:

1. $\Diamond \Box A \rightarrow \Box A$ [(A6)]
2. $\Box \neg \Box A \vee A$ [(K), 1]
3. $\Box(\Box \neg \Box A \vee \Box A)$ [$\star\star$, 2]
4. $\Box(\Diamond \Box A \rightarrow \Box A)$ [(K), 3]

W związku z Faktem 1 zwróćmy uwagę także na to, że wzmocnienie oryginalnej wersji (A04) do (A4) nie odgrywa roli w dowodzie głównej tezy *TG*. Do dowodu *LL* wystarczy (A04) (por. L1), a w dowodzie *LA* nie korzystamy ani z (A04), ani z (A4).

Uzupełnijmy teraz argumentację Gödla o dowody lematów *LL* i *LA*.

Lemat *LL* otrzymujemy z lematu:

$$L1. P(\varphi) \rightarrow \Diamond \exists_x \varphi x$$

Dowód:

1. $P(\varphi) \wedge \Box \forall_x (P(\varphi) \rightarrow \bar{\varphi} x) \rightarrow P(\bar{\varphi})$ [(A4)]
2. $P(\varphi) \wedge \Box \forall_x (P(\varphi) \rightarrow \neg \varphi x) \rightarrow \neg P(\varphi)$ [(A1), 2, (C1)]
3. $P(\varphi) \rightarrow \Diamond \exists_x Gx$ [(\Diamond/\Box) , $(\exists/\forall 1)$, 2]

Na podstawie (L1) mamy: $P(G) \rightarrow \Diamond \exists_x Gx$. Stosujemy (A5) i otrzymujemy *LL*.

W dowodzie *LA* korzystamy z:

$$L2. Gx \rightarrow GEss. x$$

Dowód:

1. $Gx \rightarrow \forall_{\psi}(P(\psi) \rightarrow \psi x)$ [(C2)]
2. $P(\psi) \rightarrow \forall_x(Gx \rightarrow \psi x)$ [1]
3. $\Box P(\psi) \rightarrow \Box \forall_x(Gx \rightarrow \psi x)$ [(Nec), 2]
4. $P(\psi) \rightarrow \Box \forall_x(Gx \rightarrow \psi x)$ [(A2), 3]
5. $Gx \rightarrow (P(\bar{\psi}) \rightarrow \bar{\psi} x)$ [1]
6. $Gx \rightarrow (\psi x \rightarrow P(\psi))$ [5, (A1), (C1)]
7. $Gx \rightarrow Gx \wedge \forall_{\psi}(\psi x \rightarrow \Box \forall_x(Gx \rightarrow \psi x))$ [4, 6]
8. $Gx \rightarrow GEss.x$ [7]

$$L3. GEssx \rightarrow (Ex \rightarrow \Box \exists_x Gx) \quad [z (C3)]$$

$$L4. Gx \rightarrow Ex \quad [(C2), (A3)]$$

Najpierw dowodzimy:

$$(LA') \quad \exists_x Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx$$

Dowód:

1. $Gx \rightarrow (Ex \rightarrow \Box \exists_x Gx)$ [L2, L3]
2. $Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx$ [1, L4]
3. $\exists_x Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx$ [2]

i wobec Faktu 1 mamy:

$$(LA) \quad \Box(\exists_x Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx)^8$$

Na koniec podajmy jeszcze dowód głównej tezy *TG*, w którym korzystamy z (A6):

$$TG. \Box \exists_x Gx$$

Dowód:

1. $\Diamond \exists_x Gx$ [LL]
2. $\Box(\exists_x Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx)$ [LA]
3. $\Diamond \exists_x Gx \rightarrow \Diamond \Box \exists_x Gx$ [2, (K), (\Diamond / \Box)]
4. $\Diamond \exists_x Gx \rightarrow \Box \exists_x Gx$ [3, A6 (!)]
5. $\Box \exists_x Gx$ [1, 4]

⁸ Por. komentarz do Faktu 1.

3. Interpretacja TG_{S4} w semantyce światów możliwych ze zmiennymi dziedzinami

W interpretacji naszej teorii skorzystamy z konstrukcji zaproponowanej przez Kovača (2003). Modyfikujemy w niej pojęcie modalnego ultrafiltru i zmieniamy pojęcie modelu. Całość upraszczamy i formułujemy języku w teorii zbiorów.

Przyjmijmy, że ramą jest uporządkowana szóstka $K = \langle W, D, \mathbf{Prop}, Q, R, \mathcal{F} \rangle$, gdzie:

- (1r) W, D są niepustymi i rozłącznymi zbiorami odpowiednio *światów możliwych* i *indywiduów*, tj. $W, D \neq \emptyset$, $W \cap D = \emptyset$
- (2r) $\mathbf{Prop} \subseteq (2^D)^W$ jest zbiorem funkcji takich, że każda z nich przyporządkowuje każdemu światu możliwemu $w \in W$ podzbiór zbioru D
- (3r) $Q: W \rightarrow 2^D$ jest funkcją, która każdemu światu możliwemu $w \in W$ przyporządkowuje podzbiór zbioru D , przy czym: $\forall_w Q(w) \neq \emptyset$
- (4r) $R \subseteq W \times W$ jest relacją *dostępności światów możliwych*
- (5r) \mathcal{F} jest *modalnym ultrafiltrem nad zbiorem D*

Modalnym ultrafiltrem \mathcal{F} nad zbiorem D jest funkcja, która każdemu światu możliwemu $w \in W$ przyporządkowuje zbiór funkcji w taki sposób, że:

- (1u) Niech $\rho(w) = D$ dla każdego $w \in W$.
Wówczas: $\forall_{w \in W} \rho \in \mathcal{F}(w)$
- (2u) Niech N będzie skończonym lub nieskończonym zbiorem indeksów.
Mamy:
[$\forall_{i \in N} \alpha_i \in \mathcal{F}(w)$ oraz $\forall_{w'} \beta(w') = \bigcap_{i \in N} \alpha_i(w')$] $\Rightarrow \beta \in \mathcal{F}(w)$
- (3u) $\alpha_i \in \mathcal{F}(w)$ oraz $\forall_{w'} (wRw' \Rightarrow \alpha_i(w') \subseteq \alpha_j(w')) \Rightarrow \alpha_j \in \mathcal{F}(w)$
- (4u) Niech $\bar{\alpha}(w) = D \setminus \alpha(w)$ dla każdego $w \in W$.
Wówczas: $\alpha \in \mathcal{F} \Leftrightarrow \bar{\alpha} \notin \mathcal{F}$
- (6r) Niech N będzie zbiorem indeksów oraz $\forall_{i \in N} \alpha_i \in \mathcal{F}(w)$.
Wówczas: jeżeli $\beta(w) = \bigcap_{i \in N} \alpha_i(w)$, to:
 $\exists_{w'} \forall_{w''} (w'Rw'' \Rightarrow \beta(w') \neq \emptyset) \Rightarrow \forall_{w''} \beta(w'') \neq \emptyset$
- (7r) $\alpha \in \mathcal{F}(w) \Rightarrow \forall_{w'} (wR w' \Rightarrow \alpha \in \mathcal{F}(w'))$
- (8r) $\alpha, \gamma, \eta \in \mathbf{Prop}$. $ess_{w, \alpha} = \{d: d \in \alpha(w) \text{ oraz } \forall_{\gamma} (d \in \gamma(w) \Rightarrow \forall_{w'} (wRw' \Rightarrow \alpha(w') \subseteq \gamma(w')))\}$ oraz $\eta(w) = \{d: \forall_{\alpha} (d \in ess_{w, \alpha} \Rightarrow \forall_{w'} (wRw' \Rightarrow \exists_{d' \in Q(w')} d' \in \alpha(w')))\}$.
Wówczas: $\forall_w \eta \in \mathcal{F}(w)$.

Skomentujmy wprowadzone pojęcia.

1. Funkcja Q przyporządkowuje światom możliwym możliwie różne uniwersa indywiduów.
2. Elementy zbioru **Prop** są ekstensjonalnymi odpowiednikami własności zrelatywizowanych do światów możliwych. Każdy z nich jest funkcją, która odnotowuje zmienność dowolnej własności w różnych światach możliwych. Zauważmy, że nie wprowadza się ograniczenia, zgodnie z którym wartością funkcji α należącej do **Prop** w dowolnym świecie w ma być zbiór indywiduów należących do jego dziedziny $Q(w)$ (w tym znaczeniu możemy także mówić w danym świecie możliwym o własnościach indywiduów, które nie są w nim aktualne).
3. Modalny ultrafiltr jest korelatem semantycznym ogółu własności pozytywnych.

Dla dowolnej ramy $K = \langle W, D, \mathbf{Prop}, Q, R, \mathcal{F} \rangle$ określimy funkcję waluacji zmiennych v tak, że:

- (1v) $v(x) \in D$ dla każdej zmiennej $x \in IV$
- (2v) $v(\varphi) \in \mathbf{Prop}$ dla każdej zmiennej $\varphi \in PV$

Funkcję v rozszerzymy na termy $\bar{\tau}$ i G :

- (3v) $\forall_w [v(\bar{\tau})](w) = D \setminus [v(\tau)](w)$
- (4v) $\forall_w [v(G)](w) = \bigcap_{i \in N} \alpha_i(w)$, dla każdej funkcji $\alpha_i \in \mathcal{F}$

Gdy v i v' są dwiema waluacjami w $K = \langle W, D, \mathbf{Prop}, Q, R, \mathcal{F} \rangle$ i mają wszystkie takie same wartości z możliwym wyjątkiem dla x , będziemy mówić, że v' jest x -wariantem waluacji v : $v =^x v'$. Podobnie dla waluacji v i v' , z jedyną możliwą różnicą dla φ : $v =^\varphi v'$ (odp. v' jest φ -wariantem waluacji v).

Dla formuł niezawierających predykatu E indukcyjnie określimy pojęcie spełniania.

Wyrażenie: $(K, w) \models^v A$ czytamy: *formuła A jest spełniona w świecie możliwym w ramie K przez wartościowanie v*.

Dla dowolnej ramy $K = \langle W, D, \mathbf{Prop}, Q, R, \mathcal{F} \rangle$, $w \in W$ i wartościowania v mamy:

- (1s) $(K, w) \models^v \tau x$ wtw, gdy $v(x) \in [v(\tau)](w)$
- (2s) $(K, w) \models^v P\tau$ wtw, gdy $v(\tau) \in \mathcal{F}(w)$
- (3s) $(K, w) \models^v x = y$ wtw, gdy $v(x) = v(y)$
- (4s) $(K, w) \models^v \neg A$ wtw, gdy $(K, w) \not\models^v A$
- (5s) $(K, w) \models^v A \rightarrow B$ wtw, gdy $(K, w) \not\models^v A$ lub $(K, w) \models^v B$

(Dla pozostałych spójników prawdziwościowych charakterystyka \models jest standardowa).

- (6s) $(K, w) \models^v \forall_x A$ wtw, gdy $(K, w) \models^{v'} A$ dla każdego $v': v =^x v'$ oraz $v'(x) \in Q(w)$
- (7s) $(K, w) \models^v \forall_\varphi A$ wtw, gdy $(K, w) \models^{v'} A$ dla każdego $v': v =^\varphi v'$
- (8s) $(K, w) \models^v \Box A$ wtw, gdy $\forall_{w'} (wRw' \Rightarrow (K, w') \models^v A)$
- (Warunki dla formuł z \exists i \Diamond są standardowe).

Zauważmy, że w odróżnieniu od aktualistycznej interpretacji kwantyfikatorów wiążących zmienne indywiduowe, przyjmujemy possybilistyczną kwantyfikację własności.

Teraz możemy wyznaczyć także waluację termu E .

Niech v_d^x będzie dowolną waluacją zmiennych, dla której $v(x) = d$. Wówczas:

$$(5v) \forall_w [v(E)](w) = \{d \in D: (K, w') \models^{v_d^x} \forall_\varphi(\varphi Ess.x \rightarrow \Box \exists_x \varphi x)\}$$

(Teraz możemy powtórzyć kroki (1s) – (8s)).

Pojęcie *modelu* zdefiniujemy tak, aby było możliwe używanie aktualistycznych kwantyfikatorów dla zmiennych pierwszego rzędu bez wprowadzania ograniczeń związanych z użyciem (APred1) (por. Cresswell 2001):

Niech $K = \langle W, D, \mathbf{Prop}, Q, R, \mathcal{F} \rangle$.

(K, v) jest modelem dla $A \in FOR$ wtw, gdy $(K, w) \models^v A$, dla każdego $w \in W$, gdzie $v(x) \in Q(w)$ dla każdego $x \in FIV(A)$.

Na podstawie wprowadzonych definicji odnotujmy, że:

Fakt 2. (K, v) , w której R jest zwrotna i przechodnia w W , jest modelem teorii aksjomatów logicznych.

Dowód jest indukcyjny. Dla C1 – C3 bierzemy 3v, 4v, 5v oraz definicje z 4u, 2u i 8r.

Fakt 3. Para (K, v) , w której R jest zwrotna i przechodnia w W , jest modelem aksjomatów specyficznych (A1) – (A6).

W dowodzie używamy: dla (A1) – 4u, dla (A2) – 7r, dla (A3) – 8r, dla (A4) – 3u, dla (A5) – 2u, dla (A6) – 6r.

Twierdzenie. Para (K, v) , w której R jest zwrotna i przechodnia w W , jest modelem teorii TG_{S4} .

Zaproponowany formalizm ogranicza silną redukcję modalności $S5$ do wybranego specyficznego kontekstu, ale też nie trywializuje logiki funktorów \square i \diamond . Jak pokazaliśmy, teoria TG_{S4} posiada interpretację w aktualistycznej semantyce światów możliwych. Te własności czynią ją być może podatną na dalsze rozszerzenia, w których bierze się pod uwagę nie tylko perfekcje i realizujący je Absolut, ale i inne kwalifikacje różnych od Niego indywiduów. Zgodnie z intencją Leibniza, teoria Absolutu (teofilozofia), jako składowa racjonalistycznej metafizyki zachodniej, jest przecież właściwą częścią ontologii (Perzanowski 1994b).

Bibliografia

- Cresswell M.J. (2001), *Modal Logic*, w: L. Goble (ed.), *Philosophical Logic*, Oxford: Blackwell, s. 133–158.
- Czermak J. (2002), *Abriss des ontologischen Argumentes*, w: *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit*, Part II. *Kompedium zum Werk*, red. B. Buldt, E. Köhler, M. Stöltzner, P. Weibel, C. Klein, W. Depauli-Schimanowich-Göttig, Wiedeń: ÖBV et HPT VerlagsgmbH and Co. KG, s. 309–324.
- Fitting M. (2002), *Types, Tableaus, and Gödel's God*, *Trends in Logic*, Dordrecht: Kluwer A. Publ.
- Hájek P. (2002), *Der Mathematiker und die Frage der Existenz Gottes (betreffend Gödels ontologischen Beweis)* w: *Kurt Gödel. Wahrheit und Beweisbarkeit*, Part II. *Kompedium zum Werk*, red. B. Buldt, E. Köhler, M. Stöltzner, P. Weibel, C. Klein, W. Depauli-Schimanowich-Göttig, Wiedeń: ÖBV et HPT VerlagsgmbH and Co. KG, s. 325–336.
- Hartshorne Ch. (1962), *The Logic of Perfection*, La Salle: Open Court, wyd. IV: 1991.
- Kovč S. (2003), *Some weakened Gödelian ontological systems*, „*Journal of Philosophical Logic*” 32, s. 565–588.
- Leibniz G.W. (1994), *Pisma z teologii mistycznej*, tłum. i red. Małgorzata Frankiewicz, Kraków: Znak.
- Perzanowski J. (1994a), *O wskazanych przez Ch. Hartshorne'a modalnych krokach w dowodzie ontologicznym św. Anzelma*, w: A. Pietruszczak (red.), *Filozofia/Logika. Filozofia Logiczna 1994*, Toruń: Wydawnictwo UMK, s. 77–96.
- Perzanowski J. (1994b), *Teofilozofia Leibniza*, w: G.W. Leibniz, *Pisma z teologii mistycznej*, tłum. i red. Małgorzata Frankiewicz, Kraków: Znak, s. 243–351.
- Sobel J.H. (1987), *Gödel's Ontological Proof*, w: J.J. Thomson (ed.), *On Being and Saying. Essays for Richard Cartwright*, London, Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, s. 241–261.

- Świętorzecka K. (2012), *Jedyność i tożsamość Absolutu w Kurta Gödla teorii summum bonum*, w: J. Golińska-Pilarek, A. Wójtowicz (red.), *Identyczność znaku czy znak identyczności? Wokół logiki niefregowskiej*, Warszawa: Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, s. 177–188.
- Woleński J. (2011), *Gaunilon dzisiaj*, w: S. Wszolek (red.), *Dowody ontologiczne. W 900. rocznicę śmierci św. Anzelma*, Kraków: Copernicus Center Press, s. 21–34.

Streszczenie

Prezentowane rozważania są efektem poszukiwania możliwie słabej podstawy formalnej dla modalnej wersji ontologicznego argumentu na konieczne istnienie Boga, naszkicowanego przez K. Gödla. Dotychczasowe modalne rekonstrukcje notatki Gödla *Ontologischer Beweis* (1970) najczęściej opierają argumentację Gödla na różnych kwantyfikatorowych rozszerzeniach logiki modalnej *S5* lub *B*. System *S5*, jako podstawa formalna zamierzona przez samego autora, umożliwia określoną konstrukcję argumentu ontologicznego, jednak z drugiej strony ten sposób rozumienia modalności może być uważany także za źródło słabości opartej na nim teorii Absolutu – redukcja modalności *S5* (i *B*) może dawać okazję do formułowania krytyki w stylu Gaunilona. Standardowe rozszerzenie *S5* lub *B* do logiki kwantyfikatorowej jest uwikłane w dalsze komplikacje: w odpowiednio rozbudowanej standardowej semantyce światów możliwych rozstrzyga się, że modele tych logik mają stałe uniwersum indywiduów. Tymczasem to rozstrzygnięcie nie ma związku z zasadniczym problemem rozważanym w formalizmie Gödla. W proponowanej wersji argumentu Gödla ograniczam redukcję modalności *S5* do wybranego specyficznego kontekstu dotyczącego istnienia Absolutu. Logiką, która pozwala zachować konstrukcję argumentacji Gödla, okazuje się system *S4*. Otrzymaną teorię wiąże z semantyką światów możliwych z możliwie zmiennymi uniwersami. Istnienie indywiduów wyrażam za pomocą kwantyfikatora \exists interpretowanego aktualistycznie, bez użycia pierwotnego predykatu istnienia.