ZAGADNIENIA
NAUKOZNAWSTWA
3 (205), 2015
PL ISSN 0044 – 1619

Jan Hertrich-Woleński
Członek PAN
Wyższa Szkoła Informatyki i Zarządzania z siedzibą w Rzeszowie
Wydział Administracji i Nauk Społecznych; Zakład Kognitywistyki

Sprzeczność … i co dalej?

Abstrakt. Artykuł dyskutuje możliwe postępowanie w sytuacji, gdy jakaś teoria okazuje się sprzeczna, a więc, gdy naruszona jest zasada sprzeczności, będąca jednym z tzw. najwyższych praw myślenia i równocześnie standardem racjonalności. W przypadku teorii matematycznych sprzeczność dyskwalifikuje daną teorię i powoduje konieczność jej odrzucenia lub zmiany. Sytuacja w teoria empirycznych jest bardziej skomplikowana. Historia nauki dokumentuje, że teorie sprzeczne skutecznie pełniły swoją rolę. Jest tak dlatego, że sprzeczność może być izolowana i niejako pomijana. Niemniej jednak, tendencja do poprawy sprzecznej teorii jest naturalna także w przypadku teorii empirycznych.
Słowa kluczowe: logika, teoria, model, zastosowania

Contradiction … and what then?

Abstract. The paper discusses a possible procedure in the case if a given theory appears to be inconsistent. It is just the case in which the principle of contradiction, as one of the so-called the highest rules of thinking and simultaneously a standard of rationality, is not obeyed. In the case of mathematical theories, contradictions disqualify a given theory and result in the necessity of their rejection or change. The problem of inconsistency of empirical theories is more complicated. The history of science provides an evidence that contradictory theories effectively play their role. It is because contradictions can be isolated and ignored to some extent. On the other hand, the tendency to improve an inconsistent theory is natural also in the case of empirical theories.
Keywords: logic, theory, model, applications

Tradycyjna logika wyróżniała tzw. najwyższe prawa myślenia. Należały do nich (formułuję je w sposób wysoce nieformalny, ale w manierze logicznej): zasada sprzeczności (nic nie jest zarazem prawdziwe i fałszywe), zasadą tożsamości (to, co jest prawdą, jest nią), zasadą wyłączonego środka (prawda i fałsz wykluczają się, *tertium non datur*) i zasadą racji dostatecznej (każda prawda ma swoją rację, dzięki której jest prawdą).[1] Dalej będę zajmował się zasadą sprzeczności (**ZS**) i problematyką z nią związaną. Zasadę tę wyraźnie sformułował Arystoteles, ale dostrzeżono ją wcześniej, m.in. Eleaci, w szczególności Parmenides (Łukasiewicz 1910/1987). Była też kwestionowana, np. przez Hegla, ale zdecydowana większość filozofów i logików uważa ja za podstawową i niekwestionowalną.[2] Z tego bierze się postulat niesprzeczności, dotyczący nauki, prawa, systemów przekonań itp.

[1] Z dzisiejszego punktu widzenia, zasada racji dostatecznej nie ma charakteru logicznego. Jest raczej prawidłem ontologicznym stwierdzającym, że jeśli coś istnieje, jest tak z powodu istnienia jakiejś racji.

[2] O innym stanowisku w logice, będzie mowa później.

Niesprzeczność jest wartością, natomiast sprzeczność stanowi wadę logiczną. Inaczej mówiąc, **ZS** ma stanowić ogólne założenie racjonalności ludzkiego myślenia, a więc jakąś podstawową regułę naszych czynności intelektualnych.

Dla dalszej analizy zanotuję zasadę sprzeczności jako prawo (schemat, tj. litera *A* jest tzw. metazmienną i reprezentuje dowolną poprawną formułę rachunku zdań:

(**LZS**) $\neg(A \wedge \neg A)$.

Literki **LZS** są skrótem dla nazwy „logiczna zasada sprzeczności”. Mamy bowiem także metalogiczną zasadę sprzeczności

(**MZS**) dla dowolnego zdania *A*, *A* i $\neg A$ nie są zarazem prawdziwe.

Jest ona wyrażona w metajęzyku, na co wskazuje użycie słowa „prawdziwe”. O ile przyjmujemy zasadę dwuwartościowości, tj. założenie, że zdanie *A* jest prawdziwe, wtedy i tylko gdy jego negacja $\neg A$ jest fałszywa, metalogiczna zasada sprzeczności może być przedstawiona w taki sposób:

(**MZS’**) dla dowolnego zdania *A*, jeśli *A* jest prawdziwe, to $\neg A$ jest fałszywe oraz jeśli $\neg A$ jest fałszywe, to *A* jest prawdziwe.

Wprawdzie **ZS** ma być podstawowym prawidłem myślenia, ale **LZS** nie jest aksjomatem logicznym i zwykle bywa dowodzona w logice. To nieco zdegradowało **LZS** jako, że jest tylko i wyłącznie zwyczajnym prawem logiki a nie czymś podstawowym w ramach systemu logiki. To jednak nie przesądza, że problem sprzeczności i niesprzeczności jest banalny. W samej rzeczy, postulat niesprzeczności, bardziej zresztą związany z logiką niż z metalogiką uchodzi za osobliwie ważny.

Wspomniane tradycyjne rozumienie **ZS** trąci psychologizmem, gdyż mowa w nim i komentarzach do niego o myśleniu, prawach myślenia, czynnościach intelektualnych czy racjonalności. Psychologizm nie jest obecnie poglądem popularnym w filozofii logiki. Z tego powodu, zasada ta jest obecnie traktowana jako własność zdań, a właściwie zbiorów zdań, co zresztą *implicite* zakładały wcześniejsze nieformalne sformułowania, a *explicite* jest obecne w (**LZS**), (**MZS**) i (**MZS’**). To zdania i zbiory zdań są niesprzeczne lub sprzeczne. Popularna definicja niesprzeczności jest taka:

(**NSP**) Zbiór *X* jest niesprzecznym zbiorem zdań wtedy i tylko wtedy, gdy pociąga logicznie żadnej pary zdań sprzecznych, tj. takiej, że jednym jej elementem jest zdanie *A* a drugim elementem zdanie $\neg A$.

Para wspomniana w (**NSP**) ma więc postać $\{A, \neg A\}$. Stosując regułę dołączania koniunkcji, możemy powiedzieć, że X jest sprzecznym zbiorem zdań, o ile pociąga logicznie koniunkcję zdań $A \wedge \neg A$; definicja wynikania logicznego ustala, że jeśli zdanie A należy do zbioru zdań X, to A wynika z X (X pociąga logicznie A). Jeśli zbiór X nie pociąga koniunkcji $A \wedge \neg A$ jest on zbiorem niesprzecznym. Definicja (**NSP**) jest przystosowana do języków zawierających spójnik negacji.

Może być jednak tak, że język, w którym formułujemy zdania nie zawiera spójnika negacji. Mimo to zbiory zdań wyrażone w tym języku mogą być sprzeczne lub niesprzeczne. W takiej sytuacji potrzebna jest ogólniejsza definicja niesprzeczności. Jest ona następująca. Niech litera **L** oznacza język, to jest zbiór poprawnych wyrażeń zdaniowych, a symbol *Cn* natomiast *Cn* denotuje operację konsekwencji logicznej (pomijam dokładniejsze definicje tych pojęć; intuicyjnie, formuły poprawne to takie, które są zgodne ze składnią języka **L**, **a** *Cn* koduje dopuszczalne środki dedukcyjne). Wówczas mamy

(**NSP’**) Zbiór X jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy $CnX \neq \mathbf{L}$.

Jeśli zatem istnieje w języku **L** takie zdanie, które nie jest wyprowadzane ze zbioru X, to zbiór ten jest niesprzeczny.

Chociaż sformułowania (**NSP**) i (**NSP’**) są równoważne dla języków z negacją (tylko takie rozpatruję), oba wzięte razem wyjaśniają skutki pojawienia się sprzeczności. Prawami logiki zdań są następujące formuły

(1) (a) $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$;
(b) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$.

Załóżmy, że X jest sprzecznym zbiorem zdań, tj. $X \vdash (A \wedge \neg A)$. Znaczy to, że formuła (koniunkcja) $A \wedge \neg A$ należy do zbioru X lub jest wyprowadzana z tego zbioru (każda formuła należąca do danego zbioru jest z niego wyprowadzana). Każda formuła wyprowadzana ze zbioru X zdań, może być uznana relatywnie do X. Przypuśćmy, że uznajemy zdania ze zbioru X. Znaczy to, krótko mówiąc, że uznajemy ten zbiór. Niech symbol **As** oznacza akt asercji. Tak więc, jeśli $X \vdash A$ oraz **As**(X), to **As**A). W konsekwencji, jeśli $X \vdash (A \wedge \neg A)$ oraz **As**(X), to **AS**($A \wedge \neg A$). Prawa logiki dają się wyprowadzić z dowolnego zbioru zdań, tj. jeśli A jest tautologią, dla dowolnego X, $X \vdash A$ lub A należy do CnX) Stosując (1a), otrzymujemy, jeśli **AS**($A \wedge \neg A$), to **AS**(B), gdzie B jest dowolne. Ten sam rezultat daje (1b), ponieważ jeśli **AS**(A), to jeśli **AS**($\neg A$), to **AS**A). Krótko mówiąc uznanie sprzeczności logicznie obliguje (nie tylko uprawnia) nas do uznania dowolnego zdania. Jeśli X jest zbiorem jakiś twierdzeń, a zdanie uznane to twierdzenie, logika prowadzi do uznania za twierdzenie dowolnego zdania.

Formuły wyszczególnione w (1) (dokładniej pierwsza z nich), to tzw. prawa Dunsa Szkota (od nazwiska filozofa i logika średniowiecznego, który je sformułował) lub zasady *ex falso quodlibet* (z fałszu wynika wszystko). Trzeb mieć jednak na uwadze, że słowo „wynika" może prowadzić do nieporozumień. Jeśli A jest zdaniem fałszywym, to implikacja $A \Rightarrow B$ jest prawdziwa nie zależnie od logicznej wartości zdania B. Jest to jeden z tzw. paradoksów implikacji materialnej, ale nie oddaje tego o co naprawdę chodzi w przeprowadzonym rozumowaniu, ponieważ ono dotyczy nie implikacji, ale wynikania logicznego. Implikacja $(A \wedge \neg A) \Rightarrow B$, jest oczywiście prawdziwa, gdyż jej poprzednik jest fałszywy jako zdanie sprzeczne, ale wskazując na skutki pojawienia się sprzeczności, argumentujemy, że usprawiedliwia ona uznanie dowolnego zdania za twierdzenie. Jeszcze inna określenie to prawo eksplozji, gdyż uzasadnia ono maksymalizację dowolnego zbioru sprzecznego do **L** (jest to zbiór wszystkich zdań) jako systemu twierdzeń. Łukasiewicz (1910/1987, 138) zauważył, że zasada sprzeczności pełni rolę gwaranta odróżnienia prawd od fałszów. Inaczej mówiąc, uznając zdania wzajemnie sprzeczne, uznajemy przynajmniej jeden fałsz. A tego nie chcemy czynić, bo zakładamy, że chociaż jesteśmy omylni i popełniamy błędy, chcemy opatrywać znakiem asercji tylko zdania prawdziwe, aczkolwiek nie zawsze tak jest.

Jak już wcześniej zaznaczyłem, postulat, że teorie naukowe, systemy przekonań czy systemy prawne winny być niesprzeczne, jest powszechnie akceptowany i uważany za bezsporny. Podane wyżej argumenty wyjaśniają, dlaczego tak jest. O ile każde zdanie mogłoby być uznane za twierdzenie wyprowadzane z dowolnego sprzecznego zbioru zdań, okoliczność ta skutecznie likwiduje jakiekolwiek kryterium prawdy. Niezależnie od tego jak filozofowie definiują prawdziwość, czy klasycznie czy też redukują ją do uznawania, koherencji, użyteczności lub zgody powszechnej, wszelkie procedury walidacyjne zmierzają do tego, aby świadczyć za tym, że twierdzenia można uznać tylko te zdania, które są należycie uzasadnione, nawet w sytuacji, gdy kwalifikacja „należycie" nie jest jasna do końca. Jeśli np. mamy sprzeczny system obowiązków nakładany przez jakiś system prawny, to sprzeczność powoduje, że dowolne zachowanie może zostać uznane za obowiązkowe a jego zaniechanie – za powód do nałożenia sankcji. Tak zdarzało się w nazistowskich obozach koncentracyjnych. Więźniowie mieli, z jednej strony, obowiązek bezwzględnego wykonywania poleceń strażników, a z drugiej strony, np. obowiązek nieprzekraczania wyznaczonej linii, a naruszenie tych obowiązków było zagrożone surowymi karami z karą śmierci włącznie. Bywało, że strażnik rzucał jakiś przedmiot poza ową linię i polecał jego przyniesienie wybranemu więźniowi. Polecenie takie było sprzeczne z regulaminem obozowym. Więzień znajdował się w sytuacji bez wyjścia, ponieważ niezależnie od tego, co zrobił, mógł być ukarany, nawet zabity.

(**LSZ**) i (**MZS**) mają charakter syntaktyczny. W szczególności, taka jest natura pojęć symbolizowanych przez $\vdash$ i Cn. Z drugiej strony, uwagi o konsekwencjach pojawienia się sprzeczności są sformułowane w ramach pragmatyki języka, gdyż pojęcie uznawania należy do niej. Mamy też mocne semantyczne usprawiedliwienie dla postulatu niesprzeczności. Tzw. twierdzenie o pełności powiada, że zbiór X zdań (formuł) jest pełny wtedy i tylko wtedy, gdy o ile $X \vdash A$, to $\mathbf{M}(X) \models A$. W słowach, zbiór X zdań jest pełny, o ile jeśli jakieś zdanie, powiedzmy A, jest wyprowadzane z X, to jest prawdziwe w modelu tego zbioru. Równoważną wersję otrzymujemy w postaci twierdzenia Gödla-Malcewa o pełności: zbiór X zdań jest pełny wtedy i tylko wtedy, gdy ma model. Co to znaczy, że zbiór X zdań ma model, powiedzmy $\mathbf{M}$? Otóż, fraza „zbiór X zdań ma model $\mathbf{M}$" znaczy, że $\mathbf{M}$ jest obiektem, o którym można mówić przy pomocy zdań ze zbioru X, w szczególności, orzekać o własnościach takich lub innych przedmiotów. Jeśli zatem jakiś zbiór zdań jest sprzeczny, to w konsekwencji nie ma modelu, a to znaczy, że nie istnieje obiekt (możliwy świat), o którym da się mówić używając zdań będących elementami danego zbioru. Ktoś jednak może zauważyć, że przecież podany wyżej opis więźnia podlegającego sprzecznemu systemowi poleceń, jednak czegoś dotyczy, mianowicie owego więźnia, strażnika, linii wyznaczającej teren poruszania się itd. To prawda, ale możemy przyporządkować temu systemowi poleceń dowolny inny model. W pewnym sensie, sprzeczne polecenia strażnika mówią o wszystkim, ale mówienie o wszystkim w tym wypadku, jest mówieniem o niczym. Tylko twierdzenia logiki odnoszą się do wszystkich modeli, gdyż są prawdziwe w każdym modelu. W konsekwencji, sprzeczność transformuje dowolną wypowiedź w tezę logiki i tym samym likwiduje podstawową jej funkcję, jaką jest kontrola poprawności inferencji.

Wszystkie diagnozy działania sprzeczności, syntaktyczne, semantyczne i pragmatyczne, w gruncie rzeczy pokazują to samo, mianowicie, że sprzeczność likwiduje kognitywną racjonalność polegającą na możności odróżniania tego, co poprawne od tego, co niepoprawne. To właśnie sprawia, że postulat niesprzeczności jest traktowany poważnie i jeśli okazuje się, że jakaś teoria jest sprzeczna stanowi to podstawę do jej dyskwalifikacji. Przez teorię, zgodnie ze współczesną metodologią nauk, rozumiem zbiór zdań domknięty operacją konsekwencji logicznej, to jest spełniający warunek, że $CnX \subseteq X$. Z uwagi na własności operacji Cn, w szczególności, postulat $X \subseteq CnX$, mamy, że X jest teorią wtedy i tylko wtedy, gdy $X = CnX$. Jeśli X jest sprzecznym zbiorem zdań, $\mathbf{L} = CnX$ i $Cn\mathbf{L} \subseteq \mathbf{L}$, każda sprzeczność produkuje $\mathbf{L}$ jako teorię, która unicestwia podział na prawdy i fałsze. Tedy, interesujące są, z logicznego punktu widzenia, tylko takie teorie, które spełniają warunek

(2) jeśli X jest teorią, to $CnX \neq \mathbf{L}$.

Formalnie rzecz ujmując, wszystkie sprzeczne teorie są wzajemnie równoważne, gdyż jeśli X, X' są sprzeczne, to $CnX = CnX' = \mathbf{L}$.

Powyższe metamatematyczne rozumienie teorii nie jest zbyt poręczne dla badań metodologicznych, zwłaszcza nad teoriami empirycznymi, gdyż nie są one przedstawiane w postaci systemów sformalizowanych. Dlatego przez teorię definiuje się jako twór składający się z określonych założeń (aksjomatów, postulatów itp., czyli pewnej bazy) oraz ich konsekwencji logicznych. Niech **B** będzie taką bazą. **T** (odtąd będę używał takiego oznaczenia) wtedy i tylko wtedy, gdy

(3) $$\mathbf{T} = Cn\mathbf{B}.$$[3]

Kwestia niesprzeczności teorii **T** sprowadza się do konsystencji jej bazy **B**. Skutki sprzeczności są jednak dokładnie takie same, jak wcześniej zarysowane, mianowicie jeśli **T**, **T’** są sprzeczne, to **T** = **T’** = **L**. Definicja teorii jako *Cn***B** jest dlatego poręczniejsze od metamatematycznego, że nie ogranicza teorii do takich zbiorów, których konsekwencje są w nich zawarte. Dla problemu (nies0przeczności jest to o tyle ważne, że jeśli X jest zbiorem sprzecznym i $X \neq \mathbf{L}$, to zbiór CnX nigdy nie jest zawarty w zbiorze X, a więc nie jest teorią w sensie metamatematycznym. A to utrudnia analizę sprzecznych teorii.

Od razu powstają dwa pytania, po pierwsze, jak sprawdzić, że warunek (2) jest spełniony w konkretnym wypadku oraz, po drugie, co zrobić, jeśli okaże się, że nie jest spełniony, w szczególności, jak przekształcić teorię sprzeczną w niesprzeczną, skoro sprzeczność traktujemy jako bazę. Najjaśniej te problemy wyglądają w naukach matematycznych. Weźmy jako przykład teorię mnogości. Jeśli X jest niepustym zbiorem, to liczba jego wszystkich podzbiorów wynosi 2^{X} i jest większa od liczby elementów zbioru X. Niech Y będzie zbiorem wszystkich zbiorów. Z definicji jest to zbiór największy, bo zawiera wszystkie inne zbiory. Ale zbiór 2^{Y} jest większy od zbioru Y, co jest sprzeczne z założeniem. W tym wypadku sprzeczność została ustalona poprzez refleksję nad pojęciem zbioru. Jest to typowa droga ujawniania sprzeczności w czystej matematyce. Sanacja polega na zmianie podstaw danej teorii matematycznej. W teorii mnogości, stało się poprzez podanie aksjomatyki, która nałożyła specjalne warunki na pojęcie zbioru. W tzw. naiwnej teorii mnogości przyjmowano, ze każda własność wyznacza zbiór przedmiotów ją spełniających (własności sprzeczne wyznaczają zbiór pusty). Nowa zasada (aksjomat wyróżniania) powiada (to oczywiście intuicja a nie pełne sformułowanie), że X jest zbiorem, jeśli jest podzbiorem innego zbioru. Aksjomat wyróżniania wyklucza zbiór wszystkich zbiorów, bo nie spełnia tego warunku. Reforma poprzez aksjomaty nie jest jedyną drogą. Berkeley krytykował pojęcie nieskończenie małych w ujęciu Leibniza i Newtona (zwłaszcza tego drugiego) jako sprzeczne, gdyż są

[3] Pomijam rozmaite dalsze warunki pozaformalne, jakie powinny spełniać teorie, np. odnoszenie się do pewnej dziedziny, moc wyjaśniająca, moc predyktywna itp. Szczegółowa analiza tych kwestii znajduje się w książkach R. Wójcickiego (1974) i J. Schrötera (1996). Autor stoi na stanowisku, nie podzielanym przez wszystkich metodologów, że teorie empiryczne podlegają analizie z metamatatycznego punktu widzenia. Podzielam to stanowisko.

one wielkościami i nie są. Matematycy byli świadomi tej krytyki, ale używali tego pojęcia bez specjalnych skrupułów, gdyż było użyteczne. Wreszcie Cauchy podał tzw. d-e definicję granicy funkcji i kłopot z nieskończenie małymi zniknął.[4]

Postulat niesprzeczności jest na tyle ważny, że matematycy starają się podać dowody niesprzeczności dla teorii matematycznych są one dwojakie, absolutne i względne (relatywne). Te pierwsze nie korzystają z żadnych założeń, by tak rzec, pozalogicznych, tj. opierają się na presumpcji, że logika jest niesprzeczna. W ten sposób, można udowodnić niesprzeczność rachunku zdań czy rachunku predykatów I rzędu. Dowody relatywne polegają na sprowadzeniu niesprzeczności teorii **T** do niesprzeczności innej teorii **T'**, o ile ta druga jest udowodniona lub założona W ten sposób udowodniono (w XIX w.) niesprzeczność geometrii nieeuklidesowej budując jej model w geometrii euklidesowej. Równocześnie był to dowód niesprzeczności przez konstrukcje modelu (interpretacji). Wprawdzie wspomniane wyżej twierdzenie Gödla-Malceva nie było wtedy jeszcze znane, ale jest to dobry przykład jego aplikacji. Ponieważ badania nad podstawami matematyki pokazały, że całą matematykę można zarytmetyzować, tj. zdefiniować wszystkie pojęcia matematyczne w arytmetyce liczb naturalnych (teoria **N**), kwestia niesprzeczności matematyki została zredukowana do konsystencji **N**. Hilbert w swoim słynnym programie sformułowanym w 1900 r. postulował podanie absolutnego dowodu niesprzeczności arytmetyki liczb naturalnych, co miało ugruntować niesprzeczność całej matematyki. Wbrew nadziejom Hilberta zagadnienie to zostało rozwiązane, ale negatywnie. W 1931 r., Kurt Gödel udowodnił, że jeśli **N** jest niesprzeczna, to dowód jej niesprzeczności nie może być przeprowadzony jej środkami, tj. w **N**. Aby udowodnić niesprzeczność arytmetyki liczb naturalnych trzeba odwołać się do bogatszych teorii, np. teorii mnogości. Wszelako niesprzeczność tej ostatniej jest bardziej problematyczna od konsystencji **N**. Twierdzenie Gödla pokazało też, iż dowody poprzez konstrukcję modeli, wymagają z reguły silniejszych środków od tych, którymi dysponujemy w teoriach, dla których modele są budowane. Teorio-modelowe dowody niesprzeczności przeważnie mają status dowodów relatywnych, przy czym założenia wymagana dla konstrukcji stosownej interpretacji są co najmniej tak mocne, jak teorie, dla których buduje się model. Sprawia to, że teoria, w ramach której konstruuje się model dla danej teorii **T** nie czyni niesprzeczności tej teorii mniej problematyczną niż przez podaniem takiego dowodu.

Wynik Gödla nie czyni jednak problemu niesprzeczności beznadziejnym dla jego traktowania w konkretnych przypadkach. Można to wyjaśnić w następujący sposób. Przypuszczenie, że jakaś teoria **T** jest sprzeczna można porównać do wniesienia aktu oskarżenia przeciwko komuś. O ile udowodni się, że **T** jest sprzeczna, akt oskarżenia okazuje się zasadny i proces kończy się orzeczeniem skazującym **T** na odrzucenie lub sanację. Może być tak, że sprzeczność nie zostaje wykazana.

[4] Ostatnio pojęcie nieskończenie małych zostało zadowalająco, pod względem logicznym, wyjaśnione w ramach tzw. analizy niestandardowej.

Zgodnie z procedurą **T** jest niewinna (zasada domniemania niewinności), aczkolwiek jej sytuacja jest lepsza, gdy obrona poda argumenty za niesprzecznością (niewinnością). Jeśli przeprowadzi się względny dowód niesprzeczności **T** względem **T'**, stanowi swoiste alibi, tak długo, jak uznaje się niesprzeczność **T'** (alibi jest wiarygodne). Nadto obrona może powoływać rozmaite dodatkowe argumenty na rzecz niewinności **T**. W szczególności, można wskazywać na to, że praktyka stosowania teorii **T** nie doprowadziła do podejrzenia o sprzeczność. W przypadku **N**, wskazuje się na doświadczenie operowania liczbami naturalnymi bez jakichkolwiek powodów do formułowania aktu oskarżenia wobec tej teorii zarzucającego jej sprzeczność (argument z dobrego sprawowania się arytmetyki liczb naturalnych). Racją dla utrzymywania, że geometria euklidesowa jest niesprzeczna, jest jej skuteczność np. w geodezji, natomiast geometrie nieeuklidesowe bronią się swoją użytecznością w fizyce. Tak więc, niemożność rozwiązania problemu niesprzeczności dedukcyjną drogą absolutnego dowodu posiadania tej własności przez daną teorię **T**, nie zmusza do uznania, że jest to teoria sprzeczna ani nawet do podejrzewania, że jest taką. Bezsporna decyzja w tej sprawie może być albo okazaniem, że **T** jest sprzeczna albo podaniem absolutnego dowodu jej niesprzeczności. Zakładam tutaj, że nasze rozumowania są przeprowadzane w logice klasycznej, a więc legitymizującą prawo eksplozji, tj. zasadę, że dowolne zdanie jest logiczną konsekwencją pary zdań sprzecznych. Aby oswoić sprzeczność proponuje się tzw. logikę parakonsystentną, tj. tolerująca sprzeczności.[5] Pomijając szczegół techniczne, systemy te odrzucają (1a) i (1b) jako tautologie logiczne, skutkiem tego, jeśli *X* jest sprzecznym zbiorem zdań, zbiór jego konsekwencji nie równa się całemu językowi. Wprawdzie logiki parakonsystentne są interesujące pod względem filozoficznym, a także mają rozmaite zastosowania, nawet techniczne, stan rzeczy w chwili obecnej uzasadnia traktowanie logiki klasycznej jako podstawowego narzędzia inferencji naukowych.

Przechodzę do zagadnienia sprzeczności w teoriach empirycznych. Jest to kwestia znacznie bardziej skomplikowana niż w przypadku teorii matematycznych, gdyż kryteria formalne są mniej transparentne. Rozważmy następujący przykład.[6] Heliocentryczna teoria Kopernika zakładała, że planety poruszają się wokół Słońca po orbitach kolistych. Kepler poprawił tę konstrukcję, przyjmując, że orbity są elipsami. Z formalnego punktu widzenia, postulat Kopernika i postulat Keplera są wzajemnie sprzecznie, bo jeśli orbity są koliste, to nie są elipsami. Trudno jednak przyjąć, że ta sprzeczność byłą istotna, skoro teoria Keplera okazała się poprawką (wcale nie mała) założeń Kopernika dyktowaną przez obserwacje astronomiczne. Z kolei teoria heliocentryczna była sprzeczna z geocentrycznym obrazem świata. Niemniej jednak, geocentryzm i heliocentryzm okazały się równoważne w ramach

[5] Por. (Priest 1986; Berto 2007; Béziau i in. 2007).

[6] Podane przykłady są rozważane dość skrótowo i bez wnikania w szczegóły techniczne. Por. (Vickers 2013) dla dokładnej analizy przypadków sprzeczności w teoriach empirycznych.

ogólnej teorii względności. Kolejny przykład to wzajemny stosunek szczególnej teorii względności (**STW**) i mechaniki klasycznej (**MK**). Jeśli przyjmiemy, że $v + c \neq c$ (co znaczy, że prędkość światła nie jest stała), **MK** staje się szczególnym przypadkiem **STW**. Z drugiej strony, powyższe nierówność jest formalnie sprzeczna z postulatem, że c jest stała, podstawowym dla **STW**. Ta sytuacja jest popularnie przedstawiana przy pomocy powiedzenia, że efekty relatywistyczne są zaniedbywalne przy niewielkich (w porównaniu z c) prędkościach. Podobnie ma się sprawa w związku z **MK** i mechaniką kwantową (**MQ**). Jeśli przyjmie się, że tzw. stała Plancka jest równa 0 ($h = 0$), efekty kwantowe mogą być pominięte, aczkolwiek obie teorie są sprzeczne.[7] Trudno byłoby jednak powiedzieć, że efekty keplerowskie (eliptyczność orbit) są zaniedbywalne w astronomii sferycznej. Mamy ciąg: astronomia Kopernika (orbity koliste) – astronomia Keplera (orbity eliptyczne) – **MK** (prawa Keplera są wyprowadzane z zasad dynamiki Newtona). Tak więc, modyfikacja Keplerowska jest inkorporowana w ramach **MK**, ale mimo to, nie uznajemy teorii Kopernika za sprzeczną z mechaniką klasyczną. Przykładem sprzeczności, której nie da się oswoić przez proste zabiegi reinterpretacyjne polegające na korzystaniu z zasady korespondencji, dostarcza historia mechaniki kwantowej (**MQ**). Planetarny model atomu wodoru sformułowany przez Ernesta Rutheforda jest sprzeczny z klasyczną elektrodynamiką (**EK**). Elektron poruszając się promieniuje, a więc traci energię i w konsekwencji, musiałaby nastąpić destrukcja atomu, czego nie obserwujemy.

Powyższe przykłady sugerują odróżnienie rozmaitych rodzajów sprzeczności.[8] Po pierwsze, mamy do czynienia z niezgodnością (celowo używam tego terminu) pomiędzy danymi doświadczenia a obrazami teoretycznymi. Tak było w przypadku astronomii geocentrycznej czy powodu dla poprawki keplerowskiej. O ile jednak ta druga została szybko zaakceptowana, model geocentryczny był długo broniony przez obmyślanie coraz to nowych środków geometrycznych. W końcu, Kopernik zdecydował., że teoria stała się zbyt skomplikowana.[9] Dalej mamy, sprzeczność powstałą przez dołączenie nowego założenia tak jak w przypadku elektrodynamiki klasycznej uzupełnionej planetarnym modelem atomu. Nazwijmy ją sprzecznością wewnętrzną (internalną), tj. w ramach jednej konstrukcji. Po trzecie, mamy sieczność zewnętrzną (eksternalną), tj. pomiędzy dwoma teoriami. Ilustracją jest stosunek astronomii geocentrycznej i astronomii heliocentryczną, **MK** i **STW**, **MK** i **MQ** oraz **MK** i **EK**. Ten ostatni przypadek jest o tyle interesujący, że **EK** nie

[7] Przyjmuję w tych rozważaniach, że zachodzi tzw. zasada korespondencji, tj. reguła, że pewne teorie stają się szczególnymi przypadkami innych, o ile wprowadzi się dodatkowe założenie, np. $h = 0$ lub $c + v \neq c$. Zasada ta, zresztą kwestionowana przez wielu metodologów, zwłaszcza z tzw. szkoły historycznej (T. Kuhn, I. Lakatos, P. Feyerabend) nie prowadzi do wniosku, że korespondujące teorie nie są niekiedy sprzeczne.

[8] Od sprzeczności trzeba odróżnić tzw. paradoksy, tj. konsekwencje nieoczekiwane czy sprzeczne z tzw. zdrowym rozsądkiem, np. paradoks bliźniąt (**STW**) czy niemożność równoczesnego pomiaru połażenia i pędu cząstki elementarnej (**MQ**). Nie są też sprzecznościami takie wady, jak nieostrość pojęć czy niekompletność założeń.

[9] Dalej pominę niezgodność pomiędzy danymi doświadczenia a teoriami.

jest redukowalna do **MK**. Odpada więc próba uznania pierwszej za szczególny przypadek drugiej. Sposoby rozwiązywania sprzeczności są różne, aczkolwiek zawsze prowadza do poszukiwania nowych teorii, które albo likwidują niezgodność z danymi, także z eksperymentami myślowymi, jak w przypadku powstania **STW** albo eliminują sprzeczność internalną albo też, co jest paradoksalne na pierwszy rzut oka, generują sprzeczność eksternalną z równoczesnym ograniczeniem dziedziny zastosowania teorii korespondującej (np. **MK**) z teorią, do której ona koresponduje (np. **MQ**). Wiele przy tym zależy od dynamiki wiedzy, kontekstu, zastosowań teorii i pewnie rozmaitych innych czynników. Stosunkowo rzadko zdarza się dowodzenie niesprzeczności przez budowę modelu, aczkolwiek strategia ta zdała egzamin przy sprawdzaniu koherencji ogólnej teorii względności.

Z logicznego punktu widzenia, sprzeczność wewnętrzna i sprzeczność wewnętrzna mają ten sam efekt, mianowicie eksplozję twierdzeń do całego języka **L**. Niezależnie od tego, czy rozpatrujemy pojedynczą teorię **T**, która jest sprzeczna, czy sumę $\mathbf{T} = \mathbf{T'} \cup \mathbf{T''}$, gdzie **T'** lub **T''** są eksternalnie sprzeczne (a więc ich suma nie jest konsystentna), mamy, że $Cn\mathbf{T} = \mathbf{L}$. A jednak teorie sprzeczne, wewnętrznie lub zewnętrznie, są w powszechnym użytku, nawet jeśli to tylko sytuacja czasowa. Aczkolwiek naukowcy dążą do tego, aby sprzeczność zlikwidować, nie wahają się przed aplikacją sprzecznych korpusów twierdzeń. Tak jest nawet w matematyce, o czym świadczy przypadek naiwnej teorii mnogości, stosowanej w sytuacji, gdy matematycy wiedzieli o tym, ze jest sprzeczna. Rzecz wygląda na pozór paradoksalnie, gdyż wydaje się polegać na uznaniu sprzeczności za nic specjalnie nagannego. Z historii nauki znanych jest wiele anegdot ilustrujących tę sytuację. Rutherford był całkowicie świadom tego, że jego model atomu jest sprzeczny z punktu widzenia **EK**, ale stosował go do wyjaśniania pewnych faktów związanych z promieniotwórczością. Miał ponoć wskazać Nielsa Bohra, wówczas stypendystę w Manchesterze (Rutheford był tam profesorem) jako badacza, który rozwiąże problem. Nie jest istotne, czy rzeczywiście tak myślał o przyszłości fizyki (Bohr rzeczywiście sformułował konsystentną teorię kwantów), ale, że skutecznie aplikował sprzeczne tezy naukowe.

Pomijając anegdoty, nie da się więc zaprzeczyć, że sprzeczne teorie skutecznie funkcjonują w praktyce naukowej. Wygląda więc na to, że logika, w szczególności, prawo eksplozji nie dostarcza całkowicie adekwatnego narzędzia dla analizy sprzeczności w nauce. Dlatego starałem się dodać w każdym wypadku przywoływania prawa Dunsa Szkota, że jest tak, jak ono stanowi, właśnie z logicznego punktu widzenia. Ta perspektywa obliguje nas do uznania dowolnego zdania w oparciu o sprzeczność, ale jest to obowiązek czysto logiczny. Kontynuując terminologię deontyczną, powstaje pytanie, czy możemy uchylić się od obligu nakładanego przez zasadę eksplozji, czyli czy można określić podstawy dla epistemicznego uprawnienie do powstrzymania się od obowiązku uznania dowolnego zdania z tego powodu, że natrafiliśmy na sprzeczność. Oczywiście chodzi o sytuacje uświadomienia sobie, że sprzeczność ma miejsce. Dla porządku dodam, że rzecz nie dotyczy zdań niezależnych od danej teorii **T**. Jeśli **T** jest niesprzeczna, a A jest zdaniem niezależnym do **T**, zdanie $\neg A$ też jest niezależne od **T**. Ujmując to bardziej technicznie, ani A ani $\neg A$ nie należy do zbioru konsekwencji logicznych teorii **T**. Wtedy teorie $\mathbf{T} \cup \{A\}$ i $\mathbf{T} \cup \{\neg A\}$ są również niesprzeczne. To, czy uznaje się teorię z A czy teorię z $\neg A$ jako twierdzeniami zależy od rozmaitych czynników. Nie jest to jednak problem operowania teorią sprzeczną, tj. zawierającą koniunkcję postaci $A \wedge \neg A$, ale wyboru pomiędzy A i $\neg A$ w warunkach niesprzeczności. Wracając do głównego problemu, pytamy, czy jest jakiś sposób ominięcia prawa eksplozji i operowania sprzecznościami tak, aby nie być zmuszonym do uznania dowolnego zdania za twierdzenie.

Procedurę to zapewniającą można nazwać izolacją sprzeczności. Polega ona na takim spreparowaniu sprzecznych twierdzeń, że nie kolidują ze sobą. Rozważmy teorię **T** taką, że dla pewnego A, $A \in \mathbf{T}$ i $\neg A \in \mathbf{T}$ (dla uproszczenia jednolicie traktuję sprzeczność wewnętrzną i sprzeczność zewnętrzną). Izolacja sprzeczności polega na wyodrębnieniu z **T** takich jej podzbiorów właściwych (tj. różnych od **T**) **T' i T"**, że obie te teorie są niesprzeczne $\mathbf{T'} \cup \{A\}$ i $\mathbf{T''} \cup \{\neg A\}$. Rozważmy **T** = **EK** plus model Rutheforda (**MR**). Jest to teoria sprzeczna. Usunięcie **MR** albo **EK** (dokładniej części, która prowadzi do sprzeczności) przywraca niesprzeczność. Niemniej jednak jest to zabieg niewystarczający, gdyż **MR** jest potrzebny dla wyjaśnienia pewnych faktów. Izolacja sprzeczności polega na równoczesnym ograniczeniu zakresu stosowalności **T**. Pracuje ona bez **MR** tam, gdzie elektrodynamika klasyczna była wcześniej skuteczna, natomiast **MR** jest właściwe dla wyjaśnienia pewnych faktów związanych z tzw. promieniowaniem krótkim. Podobnie jest przy sprzeczności wewnętrznej, gdyż założenia typu $h = 0$ lub $v + c \neq c$ automatycznie ograniczają zakres zastosowania **STW** czy **MQ**. Inaczej mówiąc i wykorzystując semantykę, izolacja sprzeczności specyfikuje ograniczone modele, w których elementy wzajemnie sprzeczne nie są równocześnie prawdziwe. Można nawet bronić poglądu, że izolacja sprzeczności zmienia znaczenie terminów, gdyż np. sens c w nierówności $v + c \neq c$ jest inny (czy nieco inny) niż, gdy c = constans.

Zarysowany sposób izolacji sprzeczności jednak nie pozostaje w konflikcie z logiką. Weźmy prawo Dunsa Szkota w wersji (1b). Jest ono uniwersalnie ważne, ponieważ taki charakter mają tautologie logiczne. Z drugiej strony, izolacja sprzeczności blokuje jego aplikację w konkretnych sytuacjach, ponieważ nie przeprowadzamy kroków prowadzących do eksplozji. Oczywiście uznajemy formułę $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ jako twierdzenie logiki. Przypuśćmy, że para $\{A, \neg A\}$ jest izolowaną sprzeczności. Znaczy to, że w pewnych okolicznościach uznajemy A, w innych $\neg A$. Jeśli uznajemy A, możemy uznać $\neg A \Rightarrow B$, ale nie samo B, natomiast jeśli uznajemy $\neg A$, asercja B też nie jest zasadna. Rzecz bowiem w tym, że eksplozja $\{A, \neg A\}$ do **L** nie odbywa się na gruncie logiki stosowanej, ale w logice stosowanej, tj. uzupełnionej pojęciem asercji i jego logicznym zachowaniem się.

Ta prosta obserwacja uchyla argument, że pojawienie się sprzeczności jest prawdziwym nieszczęściem logicznym. Sprzeczność nie jest oczywiście powodem do radości. Niemniej jednak, odróżnienie logicznej obligacji do uznawania twierdzeń od pragmatycznego uprawnienia do asercji, legitymizuje izolację sprzeczności. Takowa separacja nie deprecjonuje prób rozwiązania sprzeczności przez budowanie nowych teorii, w szczególności ogólniejszych. Jest to zresztą cel sam w sobie, niezależny od tego, czy motywowany rozwiązaniem sprzeczności. Nie wiadomo jednak, czy zostanie osiągnięty, zwłaszcza w przypadku teorii uchodzących za uniwersalne. Fizycy przyjmują, że nie ma w chwili obecnej niesprzecznej teorii obejmującej mechanikę kwantową i teorię względności. Próby jej sformułowania trwają i nadal tak będzie, aczkolwiek ich powodzenie wcale nie jest pewne. Trzeba jednak obie te teorie stosować we właściwych im granicach, a to właśnie oznacza potrzebę izolacji sprzeczności. Na zakończenie zauważę, że izolacja sprzeczności ma zastosowanie także poza nauką, mianowicie w prawie czy operowaniu przekonaniami potocznymi.

Bibliografia

Berto F., 2007, *How to Sell a Contradiction. The Logic and Metaphysics of Inconsistency*, London: College Publications.

J.-Y. Béziau, W. Carnielli, D. Gabbay (red.), 2007, *Handbook of Paraconsistency*, London: College Publications.

Łukasiewicz J., 1910/1987, *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*, Kraków: Polska Akademia Umiejętności, Kraków 1910; wydanie drugie, Warszawa: Państwowe Wydawnictwo Naukowe.

Priest G., 1986, *In Contradiction. A Study of the Tranconsient*, Dordrecht: Nijhoff.

Schrötera J., 1986, *Zur Metatheorie der Physik*, Berlin: Walter de Gruyter.

Vickers P., 2013, *Understanding Inconsistent Science*, Oxford: Oxford University Press.

Wójcicki R., 1974, *Metodologia formalna nauk empirycznych. Podstawowe pojęcia i zagadnienia*, Wrocław: Ossolineum.