Przegląd Filozoficzny – Nowa Seria
R. 25: 2016, Nr 1 (97), ISSN 1230–1493

Wykład „Przeglądu Filozoficznego”

Leszek Wroński

„Zakłady holenderskie” – nowe problemy ze starym pojęciem

Słowa kluczowe: *„zakłady holenderskie”, epistemologia formalna, uogólnione przestrzenie probabilistyczne*

W niniejszym tekście przedstawię popularną w formalnej epistemologii strategię argumentacyjną odwołującą się do tzw. „zakładów holenderskich”. Niedawno w artykule dotyczącym kilku twierdzeń kluczowych dla filozofii fizyki Benjamin Feintzeig zaproponował program badawczy, w którym ważną rolę odgrywa właśnie pojęcie „zakładu holenderskiego”. W dalszej części tekstu będę argumentował za tym, że program ten nie ma szans powodzenia.

W XX wieku epistemolodzy postanowili poważnie potraktować intuicję, iż przekonania można żywić z różną siłą; kluczowym pojęciem na tej części filozoficznego „rynku” stało się pojęcie stopnia przekonania (*degree of belief*). W jaki sposób można próbować ocenić, ile wynosi nasz stopień przekonania w jakiejś kwestii? F.P. Ramsey w swoim słynnym artykule *Truth and probability* z 1926 r. proponuje powiązać tę sprawę z zakładami, a konkretniej z cenami zakładów, które uznalibyśmy za uczciwe. Pomysł Ramseya[1] można wyrazić mniej więcej tak:

> Stopień przekonania danego podmiotu w kwestii sądu A wynosi p wtedy i tylko wtedy, gdy p jednostek umownych to cena, przy której podmiot ów uznałby za uczciwy zakład wypłacający 1 jednostkę umowną w przypadku, gdy A zachodzi, a 0, jeśli A nie zachodzi.

[1] Dokładniej: jego współczesny wariant, unikający pewnych nieistotnych dla bieżącego artykułu problemów.

Oto przykład. Załóżmy, że jednostka umowna to 100 zł. Na czym polega to, że jesteśmy przekonani w stopniu, powiedzmy, ¾, że jutro indeks WIG spadnie? W myśl powyższej definicji jest tak dokładnie wtedy, jeśli za uczciwą cenę zakładu (wypłacającego 100 zł) o to, czy jutro indeks WIG spadnie, uznalibyśmy 75 zł. Innymi słowy, przy tej cenie nie oczekiwalibyśmy zysku którejkolwiek ze stron, gdyż według samych siebie, zarówno kupując, jak i sprzedając zakład mielibyśmy ¾ szansy na zysk 25 zł i ¼ szansy na stratę 75 zł. Jeszcze innymi słowy, gdyby zmuszono nas do ustalenia ceny zakładu o 100 zł w sytuacji, w której wiedzielibyśmy, że zostaniemy zmuszeni do wzięcia w nim udziału, ale nie wiedzielibyśmy z kolei, czy będziemy kupować, czy sprzedawać, to aby zminimalizować ryzyko straty, ustalilibyśmy jego cenę na 75 zł.

Pojęcie uczciwości występujące w powyższej propozycji ma prawo być nieintuicyjne, ale przynajmniej jest ściśle zdefiniowane: otóż podmiot za uczciwy uznaje zakład, w przypadku którego nie przewiduje ani zysku, ani straty (innymi słowy, według podmiotu wartość oczekiwana zakładu wynosi 0). Jeśli Czytelnikowi nie podoba się takie użycie słowa „uczciwy" (wynika np. z niego, że legalne w naszym kraju są rozmaite nieuczciwie działające przedsiębiorstwa – ale może to całkiem realistyczny pogląd?), może w jego miejsce wstawić np. słowo „obojętny". Dla dalszych wywodów ważne jest też to, że sprawa nie dotyczy zakładów, w których podmiot naprawdę chciałby uczestniczyć (co może oczywiście zależeć od indywidualnych preferencji – prawdopodobnie wiele osób chce uczestniczyć tylko w takich zakładach, w których spodziewają się one własnego zysku, a niektórzy z kolei nie zamierzają zakładać się nigdy), tylko tego, jakie zakłady dany podmiot uznałby za uczciwe w myśl powyższej definicji.

Okazuje się, że z powyższego pomysłu na powiązanie stopni przekonań z uczciwymi zakładami można wyciągnąć ciekawe wnioski w kwestii (nie) racjonalności pewnych kombinacji stopni przekonań. Żeby odpowiednio przedstawić związane z tym rezultaty, musimy wprowadzić stosowne definicje. W stosunku do czego wykazujemy rozmaite stopnie przekonań (przyjmijmy, że wyrażane liczbami rzeczywistymi)? Załóżmy, że w stosunku do elementów pewnej skończonej rodziny sądów domkniętej na podstawowe operacje logiczne (klasyczną negację i alternatywę). Sądy traktujmy zaś roboczo jako zbiory możliwych światów; każdy sąd jest podzbiorem zbioru W wszystkich światów epistemicznie dla nas możliwych. Możemy teraz zdefiniować *przestrzeń przekonaniową* odpowiadającą stopniom przekonań podmiotu w danej chwili:

Przestrzeń przekonaniowa to trójka (W,F,b), gdzie:

- W to niepusty skończony zbiór (intuicyjnie: zbiór epistemicznie możliwych światów);

- *F* to zbiór wszystkich podzbiorów W (intuicyjnie: zbiór sądów);
- *b* to funkcja przyporządkowująca każdemu elementowi *A* zbioru *F* liczbę rzeczywistą (intuicyjnie: stopień przekonania w kwestii *A*).

Jak już zasugerowałem powyżej, odwołując się do uczciwych zakładów można pokazać nieracjonalność pewnych przestrzeni przekonaniowych. W szczególności można pokazać, że jeśli przestrzeń przekonaniowa spełnia pewne warunki, to przeciwko podmiotowi, którego stopnie przekonań obrazuje owa przestrzeń, można założyć zestaw zakładów, który niezależnie od ich wyników kończy się stratą tego podmiotu. W dodatku każdy zakład z owego zestawu podmiot postrzega jako uczciwy – wszystko to razem ma świadczyć o nieracjonalności. Będziemy mówić w takich sytuacjach, że przestrzeń przekonaniowa jest *obarczona zakładem holenderskim*[2].

Oto przykład. Tzw. zasada addytywności głosi, że ilekroć sądy *A* oraz *B* nie mogą być zarazem prawdziwe, to *b(A lub B) = b(A) + b(B)*. Rozważmy podmiot, w którego przestrzeni przekonaniowej ta zasada jest złamana. Na przykład rozważmy osobę, która jest przekonana w stopniu ⅓, że klub piłkarski Wisła przegra następny mecz (sąd *A*), również w stopniu ⅓, że Wisła wygra następny mecz (sąd *B*), ale w stopniu ½, że następny mecz Wisły nie skończy się remisem (sąd *A lub B*). Niech jednostką umowną będzie 300 zł. Nasz podmiot uzna za uczciwe takie oto 3 zakłady:

1. zakład o *A* kosztujący 100 zł;
2. zakład o *B* kosztujący 100 zł;
3. zakład o *A lub B* kosztujący 150 zł.

Wygrana w każdym z tych zakładów kończy się zyskiem 300 zł minus koszt zakładu. Rozważmy kogoś, kto *kupuje* od naszego podmiotu zakład 3, a *sprzedaje* mu zakłady 1 i 2 – nasz podmiot uważa te zakłady za uczciwe. Ale zwróćmy uwagę, że niezależnie od tego, czy okaże się, że prawdą jest *A i nie B*, czy *nie A i B*, czy też *nie A i nie B*, nasz podmiot skończy ze stratą 50 zł.[3]

---

[2] Tak: zakład holenderski definiujemy jako pewien zestaw zakładów. To niefortunne, ale tak to pojęcie funkcjonuje w literaturze. Nieznane jest mi źródło owego terminu (w oryginale *Dutch Book*).

[3] Dla przykładu rozważmy pierwszą sytuację: prawdą okazuje się *A i nie B*. Wtedy nasz podmiot wygrywa zakład nr 1, ale jego „przeciwnik” wygrywa zakład nr 3, tak więc przekazują sobie nawzajem 300 zł. Natomiast już na starcie nasz podmiot był stratny 50 zł, gdyż kupił dwa zakłady po 100 zł, a sprzedał jeden za 150 zł. I z tą stratą nasz podmiot zostaje. Argument wygląda podobnie w pozostałych przypadkach.

Czy to znaczy, że podmiot łamiący zasadę addytywności jest nieracjonalny? Zwolennicy argumentacji odwołującej się do zakładów holenderskich twierdzą, że tak. Natomiast nieracjonalność tę można postrzegać w różny sposób. Zwracałem już uwagę, że nie możemy twierdzić, iż podmiot łamiący addytywność dobrowolnie godzi się na stratę (nawet gdyby to rzeczywiście było nieracjonalne, to podmiot może przecież zadecydować, że nigdy o nic nie będzie się zakładał). Można zwracać uwagę na pewną epistemiczną dwoistość: tę samą sytuację podmiot uznaje równocześnie za uczciwą (gdyż każdy zakład ma według podmiotu wartość oczekiwaną zero) i nieuczciwą (gdyż ów podmiot może przecież przeprowadzić powyższe rozumowanie i przekonać się, że wartość oczekiwana całego zestawu zakładów jest ujemna). Byłoby to bardziej dojmujące, gdyby w mocy była taka zasada: jeśli podmiot uznaje każdy zakład należący do pewnego zestawu zakładów za uczciwy, to uznaje cały zestaw zakładów za uczciwy. Ponieważ ta zasada jest wątpliwa[4], przyjmiemy, że o nieracjonalności podmiotu świadczy fakt, że do jego nieuchronnej straty doprowadziłby zestaw zakładów, którego każdy element podmiot ów uważa za uczciwy, czyli że jego przestrzeń przekonaniowa obarczona jest zakładem holenderskim.

Zasada addytywności nie jest jedyną podyktowaną przez wymóg unikania zakładów holenderskich. Ramsey (1926) i de Finetti (1937) odkryli, że przestrzenie przekonaniowe, których funkcja *b* łamie aksjomaty klasycznego rachunku prawdopodobieństwa, obarczone są zakładami holenderskimi. Lehman (1955) oraz Kemeny (1955) pokazali, że przestrzenie przekonaniowe, których funkcja *b* spełnia owe aksjomaty, nie są obarczone zakładami holenderskimi. Możemy zatem wyrazić ogólne twierdzenie:

> *Twierdzenie o zakładach holenderskich*. Przestrzeń przekonaniowa (W,F,b) nie jest obarczona zakładem holenderskim wtedy i tylko wtedy, gdy jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną, to znaczy:
> - dla dowolnej tautologii T, $b(T)=1$;
> - dla dowolnego A należącego do F, $b(A)$ jest większe lub równe od 0;
> - dla dowolnych A oraz B należących do F, jeśli A oraz B nie mogą być zarazem prawdziwe, to $b(A \text{ lub } B) = b(A)+b(B)$.

Jeżeli (W,F,b) jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną, to F nazwiemy rodziną *zdarzeń*, a b nazwiemy *(klasycznym) prawdopodobieństwem*. Powyższego twierdzenia zazwyczaj używa się w argumentacji na rzecz tzw. *probabilizmu*: przestrzeń przekonaniowa każdego podmiotu w każdej chwili powinna być klasyczną przestrzenią probabilistyczną. Probabilizm to jedna z tzw. *syn-*

[4] Wprowadzenie do problemów, które szkicuję w tym akapicie, znajdzie Czytelnik w trzecim rozdziale książki D. Bradleya *A Critical Introduction to Formal Epistemology* (2015).

chronicznych norm epistemicznych, czyli norm dotyczących stanu podmiotu w pewnej chwili. Istnieją rozmaite normy *diachroniczne*, czyli dotyczące tego, w jaki sposób powinien zmieniać się stan przekonaniowy podmiotu w obliczu nowych danych, za którymi również można argumentować przy użyciu zakładów holenderskich (przegląd znajdzie Czytelnik w: Vineberg 2011).

Dla niektórych zastosowań klasyczne przestrzenie probabilistyczne mogą okazać się niewygodne. W szczególności, czy zawsze rodzina zdarzeń powinna być domknięta na wszystkie klasyczne operacje logiczne? T.L. Fine (1973) rozważa następujący przykład: załóżmy, że mamy szczątkowe dane o pewnym zbiorze fotografii, a mianowicie wiemy, ile z nich jest jasnych (*A*) i ile z nich jest ziarnistych (*B*). Gdybyśmy mieli tylko tyle danych i chcieli rozważyć obiekt mający reprezentować losowanie fotografii z tego zbioru oraz szanse na to, czy jest ona jasna bądź ziarnista, nie powinniśmy nawet próbować tego robić przy użyciu klasycznej przestrzeni probabilistycznej: wymagałoby to od nas ustalenia danych o kombinacjach logicznych cech, czyli np. ile fotografii jest zarówno jasnych i ziarnistych. Struktura zdarzeń powinna zatem być inna niż w przypadku klasycznych przestrzeni.

Do podobnych wniosków doszli fizycy i filozofowie fizyki szukający struktur właściwych do modelowania eksperymentów kwantowych. Abstrakcyjną istotą problemu jest to, że podczas każdego przebiegu eksperymentu można zbadać, czy zachodzi *A* (w opozycji do *nie-A*), można też zbadać, czy zachodzi *B* (w opozycji do *nie-B*), ale nie można zbadać, czy zachodzi zarówno *A*, jak i *B* (są to wyniki tzw. niekompatybilnych pomiarów). Jedna ze struktur zaproponowanych w celu uchwycenia tego typu zjawisk to tzw. *uogólniona przestrzeń probabilistyczna*, wprowadzona przez Suppesa (1966) i Guddera (1969):

> *Klasa addytywna* podzbiorów zbioru *W* to rodzina podzbiorów zbioru *W* domknięta na sumy dowolnych dwóch zbiorów rozłącznych.
> *Uogólniona przestrzeń probabilistyczna* to trójka *(W,G,g)*, gdzie *W* jest dowolnym skończonym zbiorem, *G* jest klasą addytywną podzbiorów *W*, zaś *g* spełnia następujące warunki:
> - *g(W)*=1;
> - dla dowolnego *A* należącego do *G*, *g(A)* jest większe lub równe od 0;
> - dla dowolnych *A* oraz *B* należących do *G*, jeśli *A* oraz *B* nie mogą być zarazem prawdziwe, to *g(A lub B) = g(A)+g(B)*.

Zwróćmy uwagę, że funkcja *g* w uogólnionej przestrzeni probabilistycznej spełnia klasyczne aksjomaty prawdopodobieństwa: różnica pomiędzy klasycznymi a uogólnionymi przestrzeniami leży w klasie zdarzeń, która w uogólnionych przestrzeniach nie musi zawierać wszystkich klasycznych logicznych kombinacji zdarzeń.

W niedawnym artykule B. Feintzeig (2014) udowadnia twierdzenie „pomostowe" łączące kilka głębokich twierdzeń z zakresu filozofii fizyki, jak Tw. Bella, Kochena-Speckera oraz Pitowsky'ego. Formułuje też program badawczy poszukiwania pewnego rodzaju uogólnionych przestrzeni probabilistycznych. Mają one spełniać dwa warunki.

Po pierwsze, mają być „rdzennie" nieklasyczne, tzn. nie posiadać rozszerzenia w postaci klasycznej przestrzeni. Oto definicja tego pojęcia:

> Uogólniona przestrzeń probabilistyczna *(W,G',g')* jest *rozszerzeniem* uogólnionej przestrzeni probabilistycznej *(W,G,g)*, jeśli *G* jest podzbiorem *G'*, zaś dla dowolnego *A* należącego do *G*, *g(A) = g'(A)*.

Innymi słowy, rozszerzenie przestrzeni to przestrzeń równie dobrze „pasująca" do danych empirycznych czy też przewidywań teoretycznych. Jeśli nasza uogólniona przestrzeń posiada klasyczne rozszerzenie, oznacza to, iż zjawisko, które opisujemy, nie jest w swej istocie kwantowe (i na przykład wyżej wspomniana przestrzeń opisująca zbiór fotografii oczywiście posiada klasyczne rozszerzenie). Feintzeig proponuje więc, byśmy w poszukiwaniach struktur właściwych do modelowania eksperymentów kwantowych ograniczyli się do przestrzeni nieposiadających takiego rozszerzenia.

Po drugie, według Feintzeiga poszukiwane przestrzenie powinny nie być obarczone zakładem holenderskim, jako że znamionowałoby to nieracjonalność. Ten punkt programu nie wydaje mi się wystarczająco uzasadniony w artykule (są po temu poważne powody, o czym za chwilę). Feintzeig wydaje się proponować traktowanie prawdopodobieństw w uogólnionej przestrzeni jako stopni przekonań jakiegoś podmiotu (eksperymentatora?) i używać tego pojęcia zakładu holenderskiego, którego używaliśmy do tej pory. Czyli aby ocenić, czy dany zestaw zakładów tworzy zakład holenderski, musimy rozważyć po kolei wszystkie elementy *W*, traktując każdy z nich kolejno jako świat rzeczywisty, sprawdzając, które zdarzenia z *G* zachodzą (co sprowadza się do pytania, do których z nich należy właśnie rozważany świat), a zatem, które zakłady zostały wygrane bądź przegrane.

Udało mi się jednak pokazać, że jeśli trzymamy się takiego „klasycznego" pojęcia zakładu holenderskiego, prawdziwe jest następujące twierdzenie:

> *Twierdzenie 1*. Uogólniona przestrzeń probabilistyczna nie posiada klasycznego rozszerzenia wtedy i tylko wtedy, gdy jest obarczona zakładem holenderskim[5].

---

[5] Dowód tego twierdzenia znajdzie Czytelnik w tekście: Wroński, Godziszewski 2015. Wykorzystuje on fakt pokazany przez Parisa (2001). Przypominam, że wszystkie struktury rozważane w niniejszym tekście są skończone.

Innymi słowy, projekt zaproponowany przez Feintzeiga nie ma szans powodzenia: każda przestrzeń nieobarczona zakładem holenderskim będzie przestrzenią klasyczną, co najwyżej „w przebraniu" nieklasycznej. Jeżeli chcemy używać przestrzeni istotnie nieklasycznych, musimy zgodzić się na to, że będą one obarczone zakładem holenderskim. Czy jednak rzeczywiście oznacza to zgodę na jakiś przejaw nieracjonalności?

Wydaje mi się, że nie, gdyż artykuł Feintzeiga ma inną lukę, związaną właśnie z przeniesieniem „klasycznego" pojęcia zakładu holenderskiego na grunt nieklasycznych przestrzeni. W filozofii fizyki, a w szczególności w obrębie tzw. „kwantowego bayesianizmu" znane jest inne podejście: podmiot w danym przebiegu eksperymentu nie zakłada się potencjalnie o wszystkie zdarzenia z klasy zdarzeń, tylko bierze udział w zakładach *warunkowych* o możliwe wyniki niekompatybilnych pomiarów. Koszt zakładów dotyczących tych pomiarów, które ostatecznie się nie odbyły, zostaje podmiotowi zwrócony[6]. Można, moim zdaniem, pokazać, że *każda* nieklasyczna przestrzeń probabilistyczna nie jest obarczona w tym sensie zakładem holenderskim, wobec czego projekt Feintzeiga redukuje się do pytania o warunki regulujące istnienie bądź nieistnienie klasycznego rozszerzenia przestrzeni. Niestety ten fragment literatury operuje innym pojęciem przestrzeni probabilistycznej niż Feintzeig; wydaje mi się, że szczegółowe omówienie go w takim „nietechnicznym" artykule, jak niniejszy, byłoby niestosowne. Powiem tylko, że owo konkurencyjne podejście według wielu badaczy jest bardziej naturalnie związane z ideą modelowania eksperymentów z niekompatybilnymi pomiarami.

Podsumowując:

- jeśli projekt Feintzeiga rozumieć dosłownie, powyższe Twierdzenie 1 pokazuje, iż projekt ten jest skazany na porażkę;
- jeśli zaś rozumieć zakłady holenderskie w prawdopodobnie bardziej naturalny sposób, tak, jak czynią to zwolennicy „kwantowego bayesianizmu", projekt ten redukuje się znanego już w literaturze programu poszukiwania przestrzeni nieposiadających klasycznego rozszerzenia.

Do zbadania pozostaje jeszcze na przykład kwestia tego, w jaki sposób zmienią się szanse projektu, jeśli wykorzystamy odmienne pojęcie rozszerzenia przestrzeni (np. takie, jak zaproponowane w: Hofer-Szabó i in. 2000, w myśl którego „mała" klasa zdarzeń nie jest podzbiorem „dużej", ale jest z nią powiązana pewnym homomorfizmem)[7].

---

[6] Patrz np. Caves i in. 2002 oraz Pitowsky 2006.

[7] Podziękowania. Pracę nad tekstem prowadziłem w grancie Tomasza Placka „Prawdopodobieństwo, modalności i Tw. Bella. Perspektywa formalna", w ramach programu „MISTRZ" Fundacji na rzecz Nauki Polskiej. Za owocne dyskusje chciałbym podziękować Michałowi Tomaszowi Godziszewskiemu i Tomaszowi Plackowi.

Bibliografia

Bradley D. (2015), *A Critical Introduction to Formal Epistemology*, Bloomsbury Publishing.

Caves C.M., Fuchs C.A., Schack R. (2002), „Quantum probabilities as bayesian probabilities", *Physical Review A*, 65 (2): 022305.

de Finetti B. (1937), „Foresight: Its Logical Laws, Its Subjective Sources", w: H.E. Kyburg, H.E.K. Smokler (red.), *Studies in Subjective Probability*, Huntington, NY: Robert E. Kreiger Publishing Co.

Feintzeig B. (2014), „Hidden Variables and Incompatible Observables in Quantum Mechanics", *The British Journal for the Philosophy of Science*, doi: 10.1093/bjps/axu017.

Fine T.L. (1973), *Theories of Probability*, Academic Press.

Gudder S.P. (1969), „Quantum probability spaces", *Proceedings of the American Mathematical Society*, s. 296–302.

Hofer-Szabó G., Rédei M., Szabó L. (2000), „Common cause completability of classical and quantum probability spaces", *International Journal of Theoretical Physics* 39 (3): 913–919.

Kemeny J. (1955), „Fair Bets and Inductive Probabilities", *Journal of Symbolic Logic*, 20 (3): 263–273.

Lehman R.S. (1955), „On Confirmation and Rational Betting", *Journal of Symbolic Logic*, 20 (3): 251–262.

Paris J.B. (2001), „A note on the Dutch Book method", ISIPTA, vol. 1.

Pitowsky I. (2006), „Quantum mechanics as a theory of probability", w: *Physical theory and its interpretation*, s. 213–240, Springer.

Ramsey F.P. (1926), „Truth and probability", w: A. Eagle (red.) (2010), *Philosophy of probability: contemporary readings*, Routledge.

Suppes P. (1969), „The probabilistic argument for a nonclassical logic of quantum mechanics", *Studies in the Methodology and Foundations of Science*, s. 243–252, Springer Netherlands.

Vineberg S. (2011), „Dutch Book Arguments", w: E.N. Zalta (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Summer 2011 Edition), URL = <http://plato.stanford.edu/archives/sum2011/entries/dutch-book/>.

Wroński L., Godziszewski M.T. (2015), „Dutch Books and classical extensions of generalized probability spaces" (w recenzji).

Streszczenie

W tekście przedstawiam popularną w epistemologii formalnej strategię argumentacyjną odwołującą się do tzw. „zakładów holenderskich”. Następnie opisuję projekt poszukiwania tzw. uogólnionych przestrzeni probabilistycznych nieposiadających klasycznych rozszerzeń (czyli opisujących istotnie nieklasyczne zjawiska) i równocześnie niepodatnych na zakłady holenderskie. Wskazane zostają rezultaty sugerujące, iż projekt ów nie ma szans powodzenia.