PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LX – ZESZYT 3 – 2013

EMIL PANEK

„SŁABY" I „BARDZO SILNY" EFEKT MAGISTRALI W NIESTACJONARNEJ GOSPODARCE GALE'A Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

J. von Neumann zaproponował liniowy model gospodarki (model von Neumanna, 1945-1946), w którym zdefiniował pojęcie stanu równowagi ekonomicznej oparte na idei równości technologicznych i ekonomicznych efektów produkcji. Dalsze badania nad modelem von Neumanna doprowadziły do powstania całej teorii neumannowskiej równowagi ekonomicznej. Badania w tym kierunku rozpoczęła między innymi grupa ekonomistów i matematyków pod kierunkiem Samuelsona (1960), który sformułował hipotezę, że w długich okresach czasu (horyzontach gospodarki) optymalne procesy wzrostu powinny przebiegać po ścieżkach wyznaczonych przez neumannowską równowagę ekonomiczną. Rozwój gospodarki wzdłuż takich ścieżek powinien być tym dłuższy, im dłuższy jest postulowany horyzont gospodarki. Obszar objęty neumannowską równowagą ekonomiczną przyjęło się nazywać magistralą (na wzór magistrali – autostrady – w ruchu drogowym).

Pionierska praca J. von Neumanna zapoczątkowała cały nurt badań, który w II połowie XX w. doprowadził do powstania w ekonomii matematycznej subdyscypliny dzisiaj znanej jako teoria magistral. W bogatej literaturze przedmiotu punkt ciężkości kładzie się na badanie tzw. efektu magistrali w różnych wariantach stacjonarnych gospodarek typu Neumanna – Gale'a – Leontiefa (ze stałą w czasie technologią; zob. np. bibliografię w pracy Panek, 2011). Natomiast nieliczne są prace poświęcone efektowi magistrali w niestacjonarnych gospodarkach ze zmienną technologią, zob. Gantz (1980), Joshi (1997), Keeler (1972). Wyzwanie takie podejmujemy w artykule. Inspiracją do jego napisania była publikacja autora (2013). Obowiązują oznaczenia stosowane w pracach Panek (2011, 2013).

1. MODEL NIESTACJONARNEJ GOSPODARKI GALE'A Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ. PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA

Zakładamy, że czas t zmienia się skokowo, $t = 0,1,\ldots$. Zbiór $T = \{0,1,\ldots,t_1\}$ nazywamy horyzontem gospodarki, okres końcowy t_1 definiuje długość horyzontu T. W gospodarce Gale'a zużywa się i wytwarza n towarów, których liczba nie zmienia się w czasie. Przez $x(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t)) \geqq 0$ oznaczamy wektor towarów zużywanych (nazywamy go wektorem nakładów lub zużycia produkcyjnego), a przez

$y(t) = (y_1(t),\ldots,y_n(t)) \geqq 0$ wektor towarów wytwarzanych w gospodarce w okresie t (nazywamy go wektorem wyników lub produkcji). Jeżeli z wektora nakładów $x(t)$ możliwe jest wytworzenie wektora produkcji y(t), wtedy o parze $(x(t), y(t))$ mówimy, że opisuje technologicznie dopuszczalny proces produkcji (w okresie t). Zbiór $Z(t) \subset R_+^{2n}$ wszystkich technologicznie dopuszczalnych procesów produkcji tworzy tzw. przestrzeń produkcyjną w okresie t. Inkluzja $(x,y) \in Z(t)$ oznacza, że w świetle technologii jaką dysponuje gospodarka w okresie t, z wektora nakładów x możliwe jest wytworzenie wektora produkcji y. W razie potrzeby będziemy zamiennie stosować także zapis $(x(t), y(t)) \in Z(t)$. O przestrzeniach produkcyjnych $Z(t)$ zakładamy, że dla $t = 0,1,\ldots$ spełniają następujące warunki (zob. np. Panek, 2003, rozdz. 5):

(G1) $\forall (x,y) \in Z(t)\, \forall \lambda \geq 0 \left(\lambda(x,y) \in Z(t)\right)$
(warunek proporcjonalności nakładów i wyników),

(G2) $\forall (x^i, y^i) \in Z(t), i = 1,2 \; \left(x^1 + x^2, y^1 + y^2 \in Z(t)\right)$
(warunek addytywności procesów produkcyjnych),

(G3) $\forall (x,y) \in Z(t)\,(x = 0 \Rightarrow y = 0)$
(warunek „braku rogu obfitości),

(G4) $\forall (x,y) \in Z(t) \left(x' \geqq x \Rightarrow (x',y) \in Z(t)\right)$
(możliwość marnotrawstwa nakładów),

(G5) $\forall (x,y) \in Z(t)\,(0 \leqq y' \leqq y \Rightarrow (x,y') \in Z(t))$
(możliwość marnotrawstwa mocy produkcyjnych),

(G6) przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są zbiorami domkniętymi w R^{2n},

(G7) $Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq Z$ i Z jest najmniejszym zbiorem domkniętym w R^{2n} zawierającym wszystkie przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, spełniającym warunki **(G1)** – **(G6)** (rozwój technologii w gospodarce zwiększa z czasem jej możliwości wytwórcze).

Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, $t = 0,1,\ldots$, spełniające warunki **(G1)** – **(G6)** nazywamy gale'owskimi. Zbiór Z nazywamy graniczną przestrzenią produkcyjną (będziemy też zamiennie pisać, że przestrzeń Z opisuje graniczną technologię w niestacjonarnej gospodarce Gale'a). Zapis $(x,y) \in Z$ oznacza, że w świetle granicznej technologii, w niestacjonarnej gospodarce Gale'a, z nakładów x możliwe jest wytworzenie produkcji y. Gospodarkę, której przestrzeń produkcyjna $Z(t)$, Z spełniają warunki **(G1)** – **(G7)** nazywamy niestacjonarną gospodarką Gale'a z graniczną technologią.

□ Twierdzenie 1

Jeżeli przestrzenie produkcyjne $Z(t)$, Z spełniają warunki **(G1)** – **(G7)**, to

$$(x,y) \in Z \Leftrightarrow \exists \; (x(t), y(t)) \in Z(t),\; t = 0,1,\ldots \left(\lim_t (x(t), y(t)) = (x,y) \right)$$

(tutaj i wszędzie dalej dla jednoznaczności przyjmujemy, że
$\lim_t a(t) = a \Leftrightarrow \lim_t \|a(t) - a\| = 0,\ \|a\| = \sum_i |a_i|$).

Dowód. (⇒) Niech $(x,y) \in Z$). Utwórzmy ciąg $\{x(t), y(t)\}_{t=0}^{\infty}$, w którym $\forall t(x(t) = x)$ oraz

$$y(t) = \operatorname*{argmin}_{(x,y')\in Z(t)} \|y' - y\|. \tag{1}$$

Ciąg taki istnieje, gdyż dla każdego t zadanie (1) ma rozwiązanie (norma $\|\ \|$ jest bowiem funkcją ciągłą, a zbiory $\Omega_t(x) = \{y' | (x, y') \in Z(t)\}$ są zwarte). Pokażemy, że tak zbudowany ciąg jest zbieżny do granicy (x,y). Faktycznie, ponieważ $\forall t(x(t) = x)$, wystarczy wykazać, że $\lim_t y(t) = y$. Z inkluzji $Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq \ldots \subseteq Z$ wnioskujemy, że

$$\|y(t+1) - y\| \le \|y(t) - y\|, \tag{2}$$

tj. ciąg $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$ jest ograniczony, więc zawiera podciąg $\{y(t_k)\}_{k=1}^{\infty}$ zbieżny do pewnej granicy y^0. Załóżmy, że $y^0 \neq y$. Z definicji przestrzeni $Z(t), Z$ wynika, że

$$y^0 \le y \tag{3}$$

(przypominamy, że zapis $a \le b$ oznacza $a \leqq b$ oraz $a \neq b$). Niech $\tilde{y} = \frac{1}{2}(y^0 + y)$ Wówczas $\tilde{y} \le y$ i $(x, \tilde{y}) \in Z$ (zgodnie z **(G5)**). Jednocześnie

$$(x, \tilde{y}) \notin dom \bigcup_{t=0}^{\infty} Z(t)$$

(symbolem *dom A* oznaczamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający A). Istotnie, gdyby $(x, \tilde{y}) \in dom \bigcup_{t=0}^{\infty} Z(t)$, to istniałby ciąg procesów $(x, \tilde{y}(t)) \in Z(t)$ $t = 0,1,\ldots$, zbieżny do $(x, \tilde{y})$, gdzie $\tilde{y} \ge y^0$. Zgodnie z (3)

$$\|\tilde{y} - y\| < \|y^0 - y\|,$$

co przeczy definicji (1) ciągu $\{y(t)\}_{t=0}^{\infty}$.

Zatem $\lim_k y(t_k) = y$. Wówczas na podstawie (2) wnioskujemy, że $\lim_t y(t) = y$.

(⇐) Ponieważ $(x(t), y(t)) \in Z(t) \subseteq Z$, $t = 0,1,\ldots$ oraz $\lim_t (x(t), y(t)) = (x, y)$ i graniczna przestrzeń produkcyjna Z jest domknięta w R^{2n}, zatem $(x,y) \in Z$.

■

Przestrzenie produkcyjne $Z(t), Z$ są stożkami domkniętymi w R_+^{2n} z wierzchołkami w 0. Interesują nas nietrywialnie procesy $(x,y) \neq 0$, tj. elementy zbiorów $Z(t)\backslash\{0\}, Z\backslash\{0\}$.

2. TECHNOLOGICZNA I EKONOMICZNA EFEKTYWNOŚĆ PRODUKCJI. RÓWNOWAGA VON NEUMANNA W GOSPODARCE Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

Weźmy proces $(x,y) \neq 0$. Wówczas, zgodnie z **(G3)**, mamy $x \neq 0$. Liczbę

$$\alpha(x,y) = \max\{\alpha | \alpha x \leqq y\}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x,y). Funkcja α jest ciągła na $Z(t)\backslash\{0\}$ oraz $Z\backslash\{0\}$ i dodatnio jednorodna stopnia 0 (Panek, 2003, rozdz. 5, tw. 5.2.). Liczby

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \alpha(x,y)\,, \tag{4}$$

$$\alpha_M = \max_{(x,y)\in Z\backslash\{0\}} \alpha(x,y) \tag{5}$$

nazywamy odpowiednio:
– optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t (z przestrzenią produkcyjną $Z(t)$),
– optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią (z graniczną przestrzenią produkcyjną Z).

□ **Twierdzenie 2**

Przy założeniach twierdzenia 1:

(i) zadania (4), (5) mają rozwiązania, tj.

$$\exists(\bar{x}(t),\bar{y}(t)) \in Z(t)\left(\alpha(\bar{x}(t),\bar{y}(t)) = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha_{M,t}\right),$$

$$\exists(\bar{x},\bar{y}) \in Z\left(\alpha(\bar{x},\bar{y}) = \max_{(x,y)\in Z\backslash\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha_M\right),$$

(2i) $\forall t(\alpha_{M,t} \leq \alpha_{M,t+1} \leq \alpha_M)$.

Dowód. (i) Ponieważ funkcja α jest dodatnio jednorodna stopnia 0 (i ciągła) na $Z(t)\backslash\{0\}$, $Z\backslash\{0\}$, więc zadania (4), (5) są równoważne z zadaniami (odpowiednio)

$$\max_{(x,y)\in\Gamma(t)} \alpha(x,y) \tag{4’}$$

$$\max_{(x,y)\in\Gamma} \alpha(x,y) \tag{5’}$$

maksymalizacji ciągłej funkcji α na zwartych zbiorach

$$\Gamma(t) = \{(x,y) \in Z(t) \mid \|x,y\| = 1\},$$

$$\Gamma = \{(x,y) \in Z \mid \|x,y\| = 1\},$$

które mają rozwiązania (tw. Weierstrassa).

(2i) Zgodnie z **(G7)**

$$Z(t) \subseteq Z(t+1) \subseteq ... \subseteq Z,$$

stąd

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t) \le \max_{(x,y)\in Z(t+1)\backslash\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha(\bar{x}(t+1), \bar{y}(t+1) \le ...$$

$$\le \max_{(x,y)\in Z\backslash\{0\}} \alpha(x,y) = \alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha_M .$$

■

O parze wektorów $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ mówimy, że tworzy optymalny proces produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale’a w okresie t; podobnie o parze wektorów $(\bar{x}, \bar{y})$ mówimy, że tworzą optymalny proces produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią (graniczny optymalny proces produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale’a).

Ponieważ $\forall\lambda > 0$

$$\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha(\lambda\bar{x}(t), \lambda\bar{y}(t)) = \alpha_{M,t}$$

oraz

$$\alpha(\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\lambda\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \alpha_M ,$$

zatem w niestacjonarnej gospodarce Gale’a optymalne procesy produkcji są określone z dokładnością do struktury.

O granicznej przestrzeni produkcyjnej Z zakładamy dodatkowo, że spełnia następujący warunek (tzw. warunek regularności):

(G8) $\exists(\bar{x},\bar{y})\in Z\big(\alpha(\bar{x},\bar{y})=\alpha_M \;\&\; \bar{y}>0\big)$

(istnieje graniczny optymalny proces produkcji, w którym wytwarzane są wszystkie towary). Gospodarkę niestacjonarną Gale'a mającą tę własność nazywamy granicznie regularną. Z warunku **(G5)** wynika natychmiast, że w granicznie regularnej gospodarce Gale'a

$$\exists(\bar{x},\bar{y})\in Z(\alpha_M\bar{x}=\bar{y}) \text{ oraz } \alpha_M>0\,. \tag{6}$$

Mówiąc o granicznym optymalnym procesie produkcji mamy dalej na uwadze proces $(\bar{x},\bar{y})$ spełniający warunek (6).

O wektorze $\bar{s}=\dfrac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}$ mówimy, że charakteryzuje strukturę produkcji w granicznym optymalnym procesie. Z (6) wynika, że wektor ten charakteryzuje także strukturę nakładów w takim procesie:

$$\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|}=\frac{\alpha_M^{-1}\bar{y}}{\|\alpha_M^{-1}\bar{y}\|}=\frac{\alpha_M^{-1}\bar{y}}{\alpha_M^{-1}\|\bar{y}\|}=\frac{\bar{y}}{\|\bar{y}\|}=\bar{s}\,.$$

Półprostą

$$N=\{\lambda\bar{s}\,|\,\lambda>0\} \tag{7}$$

nazywamy magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią.

Niech $p=(p_1,\ldots,p_n)\geq 0$ będzie wektorem cen towarów oraz (x,y) dowolnym procesem produkcji. Liczbę

$$\beta(x,y,p)=\frac{\langle p,y\rangle}{\langle p,x\rangle}$$

(tam gdzie jest określana) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu (x,y) przy cenach p (tutaj i wszędzie dalej $\langle a,b\rangle$ oznacza iloczyn skalarny wektorów a,b : $\langle a,b\rangle=\sum_i a_ib_i$).

Jeżeli gospodarka Gale'a jest granicznie regularna, to

$$\exists\bar{p}\geq 0 \quad \forall(x,y)\in Z\big(\langle\bar{p},y\rangle-\alpha_M\langle\bar{p},x\rangle\leq 0\big) \tag{8}$$

oraz

$$\beta(\bar{x},\bar{y},\bar{p}) = \max_{(x,y)\in Z\setminus\{0\}} \beta(x,y,\bar{p}) = \alpha(\bar{x},\bar{y}) = \alpha_M \tag{9}$$

(zob. Panek, 2003, tw. 5.3). Wektor $\bar{p}$ nazywamy wektorem cen von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią. O trójce $\{\alpha_M, (\bar{x},\bar{y}), \bar{p}\}$ mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale’a z graniczną technologią w równowadze von Neumanna. Dochodzi w niej do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z efektywnością technologiczną na najwyższym poziomie jaki może osiągnąć niestacjonarna gospodarka Gale’a z graniczną technologią.

W celu zapewnienia jednoznaczności magistrali produkcyjnej (7) zakładamy, że

(G9) $\forall (x,y)\in Z\setminus\{0\}\ \left(x\notin N \Rightarrow \beta(x,y,\bar{p}) = \dfrac{\langle \bar{p},y\rangle}{\langle \bar{p},x\rangle} < \alpha_M\right)$

(efektywność ekonomiczna jakiegokolwiek procesu poza magistralą jest niższa od optymalnej). Warunek $x \notin N$ jest równoważny z $\dfrac{x}{\|x\|} \neq \bar{s}$.

□ **Twierdzenie 3.** (Radner, 1961)

Jeżeli zachodzą warunki **(G1) – (G9)**, to

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \forall (x,y)\in Z\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon \Rightarrow \beta(x,y,\bar{p}) = \frac{\langle \bar{p},y\rangle}{\langle \bar{p},x\rangle} \leq \alpha_M - \delta_\varepsilon\right)$$

■

Twierdzenie to gra istotną rolę przy dowodzi magistralnych własności optymalnych procesów wzrostu, o których mowa w kolejnych twierdzeniach 4, 5.

3. WZROST

Odwzorowanie (multifunkcję) $a_t : R_+^n \to 2^{R_+^n}$ postaci

$$a_t(x) = \{y \mid (x,y)\in Z(t)\}$$

nazywamy przekształceniem technologicznym w niestacjonarnej gospodarce Gale’a w okresie t (generowanym przez przestrzeń produkcyjną $Z(t)$). Podobnie definiujemy przekształcenie technologiczne $a : R_+^n \to 2^{R_+^n}$,

$$a(x) = \{y \mid (x,y)\in Z\}$$

(generowane przez graniczną przestrzeń produkcyjną Z).

Jeżeli $Z(t)$ jest gale'owską przestrzenią produkcyjną (spełniającą warunki **(G1)** – **(G6)**), to przekształcenie technologiczne a_t ma następujące własności (Panek, 2003, tw.5.1):

- $\forall x \geqq 0 \ \ \forall \lambda > 0 \left(a_t(\lambda x) = \lambda a(x) \right)$ (jest dodatnio jednorodne stopnia 1),
- $\forall x^1, x^2 \geqq 0 \ \ \left(a_t(x^1 + x^2) \subseteq a_t(x^1) + a(x^2) \right)$ (jest poładdytywne),
- $a_t(0) = \{0\}$,
- $\forall (x,y) \in Z(t) \ \ (y \in a_t(x) \,\&\, 0 \leqq y' \leqq y \Rightarrow y' \in a_t(x))$ (możliwość marnotrawstwa mocy produkcyjnych),
- $\forall (x,y) \in Z(t) \qquad (y \in a_t(x) \,\&\, x' \geqq x \Rightarrow y \in a_t(x'))$ (możliwość marnotrawstwa nakładów),
- $\forall x \geqq 0$ zbiory (obrazy) $a_t(x)$ są wypukłe i zwarte,
- przekształcenie a_t jest półciągłe (z góry), tzn. spełnia warunek

$$\forall (x^i, y^i)_{i=1}^{\infty} \left(y^i \in a_t(x^i) \,\&\, (x^i, y^i) \underset{i}{\rightarrow} (\bar{x}, \bar{y}) \Rightarrow \bar{y} \in a_t(\bar{x}) \right).$$

Podobne własności ma przekształcenie technologiczne a generowane przez graniczną przestrzeń produkcyjną Z spełniającą warunki **(G1)-(G7).**
Ponadto łatwo pokazać, że

- $\forall t \ \forall x \geqq 0 \ (a_t(x) \subseteq a_{t+1}(x) \subseteq a(x))$.

Weźmy dowolny ciąg procesów $(x(t), y(t)) \in Z(t)$, $t \in T = \{0, 1, \ldots t_1\}$. Standardowo zakładamy, że w horyzoncie T nakłady w okresie następnym mogą pochodzić tylko z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim[1]: $x(t+1) \leqq y(t)$, $t = 0,1,\ldots t_1 - 1$, co przy warunkach **(G5)**, **(G6)** prowadzi do inkluzji $(y(t), y(t+1)) \in Z(t+1)$, $t = 0,1,\ldots t_1 - 1$, lub równoważnie:

$$y(t+1) \subseteq a_{t+1}(y(t)), \ t = 0,1,\ldots t_1 - 1. \tag{10}$$

Ustalmy wektor produkcji y^0 wytworzonej w gospodarce Gale'a w okresie początkowym $t = 0$:

$$y(0) = y^0 \geq 0. \tag{11}$$

O ciągu wektorów produkcji $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (10) – (11) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Przyjmijmy oznaczenia:

[1] Jest to wariant modelu Gale'a gospodarki zamkniętej. W rozbudowanych wersjach modelu warunek ten można osłabić.

$$R_{y^0,0} = \{y^0\}\,,\; R_{y^0,t} = \bigcup_{x \in R_{y^0,t-1}} a_t(x)\,, \quad t = 1,2,\ldots t_1$$

($R_{y^0,t}$ jest zbiorem wszystkich wektorów produkcji możliwych do wytworzenia w okresie t przez niestacjonarną gospodarkę Gale'a z początkową produkcją $y(0) = y^0$).

Jeżeli spełnione są warunki **(G1)** – **(G6)**, to $\forall t_1 < +\infty\ \forall y^0 \geq 0$ zbiory $R_{y^0,t}$ są niepuste, zwarte i wypukłe. Innymi słowy, istnieją (y^0, t_1) dopuszczalne procesy wzrostu (Panek, 2003, lemat 5.1).

4. EFEKT MAGISTRALI

Rozpatrzmy następujące zadanie maksymalizacji wartości produkcji, mierzonej w cenach von Neumanna, wytworzonej w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w ostatnim okresie horyzontu $T = \{0,1,\ldots t_1\}$:

$$\begin{aligned}&\max\langle \bar{p}, y(t_1)\rangle\\ &\text{p.w.}(10) - (11)\\ &(\text{wektor } y^0 \text{ ustalony}).\end{aligned} \tag{12}$$

Zadanie to ma rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$, które będziemy nazywać $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a[2]. Przez $s^*(t) = \dfrac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|}$ oznaczamy strukturę produkcji w $(y^0, t_1, \bar{p})$ – optymalnym procesie wzrostu w okresie t.

W poniższym twierdzeniu, mówiącym o „magistralnej” stabilności procesów optymalnych, istotną rolę gra możliwość dojścia gospodarki do magistrali:

(G10) Istnieje taki $(y^0, \breve{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{\breve{t}}$, gdzie $\breve{t} < t_1$, że

$$\alpha(\tilde{y}(\breve{t}-1), \tilde{y}(\breve{t})) = \alpha_M\,. \tag{13}$$

---

[2] Zadanie (12) ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje rozwiązanie zadania

$$\begin{aligned}&\max\langle \bar{p}, y\rangle\\ &y \in R_{y^0,t_1}\end{aligned}$$

(maksymalizacji funkcji liniowej, a więc ciągłej, na zwartym zbiorze R_{y^0,t_1}). Zadanie to ma oczywiście rozwiązanie, zatem istnieje również rozwiązanie zadania (12).

□ **Twierdzenie 4**[3] („Słabe" twierdzenie o magistrali)

Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)-(G10)**, to dla dowolnej liczby $\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów, w których struktura produkcji w $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalnym procesie spełnia warunek

$$\left\| s^*(t) - \overline{s} \right\| \geq \varepsilon \tag{14}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu T.

Dowód. Weźmy $(y^0, t_1, \overline{p})$ optymalny proces $\{\widetilde{y}(t)\}_{t=0}^{\breve{t}}$ (rozwiązanie zadania (12)). Ponieważ dla każdego t warunek $y^*(t+1) \in (y^*(t))$ jest równoważny z

$$(y^*(t),\ y^*(t+1)) \in Z(t+1) \subseteq Z,$$

więc zgodnie z (8)

$$\langle \overline{p}, y^*(t+1) \rangle \leq \alpha_M \langle \overline{p}, y^*(t) \rangle,\ t = 0,1,\ldots t_1 - 1\,. \tag{15}$$

Oznaczmy przez L_ε zbiór tych okresów $t \in T$, w których zachodzi nierówność (14). Niech l_ε będzie liczbą elementów zbioru L_ε. Wówczas, zgodnie z twierdzeniem 3,

$$\langle \overline{p}, y^*(t+1) \rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon) \langle \overline{p}, y^*(t) \rangle, \text{ dla } t \in L_\varepsilon\,. \tag{16}$$

Z (15), (16) otrzymujemy:

$$\langle \overline{p}, y(t_1) \rangle \leq \alpha_M^{t_1 - l_\varepsilon} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)^{l_\varepsilon} \langle \overline{p}, y^0 \rangle. \tag{17}$$

Zgodnie z warunkiem **(G10)** istnieje taki $(y^0, \breve{t})$ – dopuszczalny proces wzrostu $\{\widetilde{y}(t)\}_{t=0}^{\breve{t}}$, $\breve{t} < t_1$, że $\alpha(\widetilde{y}(\breve{t}-1), \widetilde{y}(\breve{t})) = \alpha_M$. Ponieważ $\widetilde{y}(\breve{t}) \in a_{\breve{t}}(\widetilde{y}(\breve{t}-1))$, więc $(\widetilde{y}(\breve{t}-1), \widetilde{y}(\breve{t})) \in Z(\breve{t})$. Z (13) oraz z warunku (G5) wynika wówczas, że $(\widetilde{y}(\breve{t}-1), \alpha_M \widetilde{y}(\breve{t}-1)) \in Z(\breve{t})$, czyli $(\widetilde{y}(\breve{t}-1) \in N$, tzn. $\widetilde{y}(\breve{t}-1) = \sigma\overline{s}$ dla pewnej liczby $\sigma > 0$. Stąd, zważywszy na **(G7)**, otrzymujemy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces

$$y(t) = \begin{cases} \widetilde{y}(t), & dla\ \ t = 0,1,\ldots,\breve{t} - 1 \\ \sigma\overline{s}\ \alpha_M^{t - \breve{t} + 1}, & dla\ t = \breve{t}, \breve{t} + 1, \ldots, t_1 \end{cases}$$

[3] Jest to dostosowana do specyfiki niestacjonarnej gospodarki Gale'a z graniczną technologią wersja twierdzenia 5.8 udowodnionego w pracy Panek (2003).

oraz nierówność:

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1)\rangle \geq \langle \overline{p}, y(t_1)\rangle = \sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}+1}\langle \overline{p},\overline{s}\rangle > 0. \tag{18}$$

Łącząc warunki (17), (18) dochodzimy do nierówności

$$\alpha_M^{t_1-l_\varepsilon}(\alpha_M-\delta_\varepsilon)^{l_\varepsilon}\langle \overline{p}, y^0\rangle \geq \sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}+1}\langle \overline{p},\overline{s}\rangle > 0,$$

z której otrzymujemy oszacowanie górnego ograniczenia liczby l_ε:

$$l_\varepsilon \leq \frac{\ln A}{\ln\alpha_M - \ln(\alpha_M-\sigma_\varepsilon)} = B,$$

gdzie $A = \dfrac{\alpha_M^{\breve{t}-1}\langle \overline{p}, y^0\rangle}{\sigma\langle \overline{p},\overline{s}\rangle}$. W charakterze liczby k_ε wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od $\min\{0,B\}$. Liczba ta nie zależy od t_1 (tj. od długości horyzontu T).

■

W myśl twierdzenia, optymalne procesy wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią „prawie zawsze" (poza pewną skończoną liczbą okresów, niezależną od długości horyzontu, w którym badamy funkcjonowanie gospodarki) przebiegają dowolnie blisko magistrali wyznaczanej przez graniczną technologię. Na magistrali gospodarka osiąga najwyższe tempo wzrostu.

Prostą (aczkolwiek nietrywialną) konsekwencją twierdzenia 4 jest poniższa wersja „bardzo silnego" twierdzenia o magistrali z graniczną technologią.

□ **Twierdzenie 5** („Bardzo silne" twierdzenie o magistrali)

Jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a spełniającej warunki **(G1)-(G9)** $(y^0, t_1, \overline{p})$ – optymalny proces wzrostu w pewnym okresie $\breve{t} < t_1$ spełnia warunek $\alpha(y^*(\breve{t}), y^*(\breve{t}+1)) = \alpha_M$ (prowadzi do magistrali N), to

$$\forall\, t \in \{\breve{t}+1, \dots, t_1-1\}\ (y^*(t) \in N).$$

Dowód. Optymalny proces $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ z założenia w okresie $\breve{t} < t_1$ prowadzi do magistrali. Istnieje więc taka liczba $\sigma > 0$, że $(y^*(\breve{t}) = 65$ oraz (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu $\{\widetilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ postaci:

$$\widetilde{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & dla \quad t = 0,1,\dots,\breve{t}-1 \\ \sigma\overline{s}\,\alpha_M^{t-\breve{t}}, & dla \quad t = \breve{t}, \breve{t}+1,\dots,t_1 \end{cases}$$

(dowód przebiega analogicznie jak w twierdzeniu 4).

Wówczas

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1)\rangle \geq \langle \overline{p}, \widetilde{y}(t_1)\rangle = \sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}} \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle > 0. \tag{19}$$

Z drugiej strony, postępując jak przy dowodzie twierdzenia 4, z warunku (15) otrzymujemy:

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_M \langle \overline{p}, y^*(t_1-1)\rangle \leq \ldots \leq \alpha_M^{t_1-\breve{t}} \langle \overline{p}, y^*(\breve{t})\rangle = \sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}} \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle. \tag{20}$$

Załóżmy, że w pewnym okresie $\tau \in \{\breve{t}+1, \ldots, t_1-1\}$:

$$y^*(\tau) \notin N, \text{ tzn. } \exists \varepsilon > 0 \left(\left\| \frac{y^*(\tau)}{\|y^*(\tau)\|} - \overline{s} \right\| \geq \varepsilon \right).$$

Wówczas, zgodnie z twierdzeniem 3

$$\exists \delta_\varepsilon > 0 \ (\langle \overline{p}, y^*(\tau+1)\rangle \leq (\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \overline{p}, y^*(\tau)\rangle),$$

co łącznie z (20) prowadzi do nierówności:

$$\langle \overline{p}, y^*(t_1)\rangle \leq \sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \overline{p}, \overline{s}\rangle. \tag{21}$$

Z (19), (21) otrzymujemy warunek

$$\sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}-1} (\alpha_M - \delta_\varepsilon)\langle \overline{p}, \overline{s}\rangle \geq \sigma\alpha_M^{t_1-\breve{t}} \langle \overline{p}, \overline{s}\rangle > 0,$$

z którego wynika, że $\delta_\varepsilon \leq 0$. Otrzymana sprzeczność zamyka dowód.

■

Twierdzenie 5 głosi, że „wejście" optymalnego procesu wzrostu w pewnym okresie na magistralę w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią skutkuje jej pobytem na magistrali wszędzie dalej, za wyjątkiem ewentualnie ostatniego okresu horyzontu *T*.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

[1] Gantz D. T., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1777-90.
[2] Joshi S., (1997), Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Envirenments, *Int. Econ. Rev.*, 38 (1), 225-248.
[3] Keeler E. B., (1972), A Twisted Turnpike, *Int. Econ. Rev.*, 13 (1), 160-166.
[4] Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wydawnictwo AE w Poznaniu.
[5] Panek E., (2011), O pewnej prostej wersji „słabego” twierdzenia o magistrali w modelu von Neumanna, *Przegląd Statystyczny*, 58 (1-2), 75-87.
[6] Panek E., (2013), Niestacjonarny model von Neumanna z graniczną technologią, *Studia Oeconomica Posnaniensia*, 1 (1), 49-68.
[7] Radner R., (1961), Paths of Economic Growth that are Optimal with Regard only to Final States: A Turnpike Theorem, *Rev. Econ. Studies*, 28 (2), 98-104.
[8] Samuelson P. A., (1959), Efficient Path of Capital Accumulation in Terms of the Calculus of Variations, w: Arrow K. J., Karlin S., Suppes P., (red.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford, California, 77-88.
[9] Von Neumann J., (1945-1946), A Model of General Economic Equilibrium, *Rev. Econ. Studies*, 13 (1), 1-9.

„SŁABY” I „BARDZO SILNY” EFEKT MAGISTRALI W NIESTACJONARNEJ GOSPODARCE GALE’A Z GRANICZNĄ TECHNOLOGIĄ

Streszczenie

W bogatej literaturze z teorii magistral zdecydowana większość prac poświęcona jest magistralnym własnościom optymalnych procesów wzrostu w stacjonarnych gospodarkach typu Neumanna – Gale’a – Leontiefa.

Do bardzo nielicznych należą publikacje, których autorzy podejmują próbę zbadania własności optymalnych procesów wzrostu w gospodarkach niestacjonarnych (ze zmienną technologią). Zadanie to podjęto w artykule na gruncie niestacjonarnej gospodarki Gale’a z technologią graniczną.

Słowa kluczowe: niestacjonarny model Gale’a, technologia graniczna, równowaga von Neumanna, magistrala produkcyjna

„WEAK" AND „VERY STRONG" TURNPIKE EFFECT
IN THE NON-STATIONARY GALE ECONOMY WITH LIMIT TECHNOLOGY

A b s t r a c t

In the rich literature on the turnpike theory the vast majority of papers consider turnpike properties of optimal growth processes in the stationary Neumann-Gale-Leontief economies.

There are only few papers, in which their authors attempt to explore characteristics of the optimal growth processes in the non-stationary economies (with changeable technology). This objective has been undertook in this paper with the non-stationary Gale economy with the limit technology.

Keywords: non-stationary Gale model, limit technology, von Neumann equilibrium, production turnpike