

RENATA WRÓBEL-ROTTER

ESTYMOWANE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ I AUTOREGRESJA WEKTOROWA. ASPEKTY PRAKTYCZNE¹

1. WSTĘP

Artykuł jest poświęcony zagadnieniom praktycznego zastosowania modeli należących do klasy DSGE-VAR (ang. *Dynamic Stochastic General Equilibrium Vector AutoRegression*). Celem pracy jest empiryczna ilustracja zmienności wnioskowania o parametrze wagowym w zależności od przyjmowanych założeń *a priori*. W szczególności skoncentrowano się na problemie wyboru optymalnego udziału informacji pochodzących z liniowego rozwiązania modelu równowagi ogólnej, bazującym na kryterium maksymalizacji brzegowej gęstości obserwacji, w zależności od specyfikacji *a priori* dla parametru wagowego. Modele DSGE-VAR rozważono w dwóch wariantach: w pierwszym przypadku oszacowano ciąg modeli warunkowych względem ustalonych arbitralnie wartości parametru wagowego, natomiast w drugim dopuszczono pełne wnioskowanie *a posteriori* o optymalnym udziale informacji wstępnej, przy założeniu rozkładów: jednostajnego, przesuniętego gamma i zmodyfikowanego beta. Całość rezultatów została przedyskutowana na przykładzie estymowanego modelu równowagi ogólnej zaczerpniętego z literatury. Zagadnienia wpływu specyfikacji *a priori* zostały uzupełnione o ilustrację wykorzystania w praktyce metod oceny zbieżności łańcucha Markowa do rozkładu stacjonarnego, w szczególności średnich ergodycznych oraz wskaźników opartych na porównywaniu wariancji wewnątrz- i międzyłańcuchowej.

2. MODEL DSGE-VAR

Model DSGE-VAR powstaje po przyjęciu rozkładu *a priori* generowanego na postawie estymowanego modelu równowagi ogólnej dla wektorowej autoregresji bez restrykcji, gdzie udział informacji *a priori* jest określany przez parametr wagowy λ . W zapisie macierzowym autoregresja wektorowa rzędu p , (VAR(p)), ma postać:

¹ Praca wykonana w ramach badań statutowych Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie. Autorka pragnie złożyć podziękowania Profesorowi Jackowi Osiewalskiemu oraz uczestnikom seminarium Katedry Ekonometrii i Badań Operacyjnych za komentarze i dyskusję podczas prezentacji opracowania.

$$Y = X\Phi + U, \quad (1)$$

gdzie Y jest macierzą $(T \times n)$ zawierającą T obserwacji z n szeregów czasowych, X oznacza macierz $(T \times (1 + np))$, U jest macierzą $(T \times n)$ składników losowych, składającą się z wierszy u_t' , gdzie: u_t ma n -wymiarowy rozkład normalny: $u_t \sim N^{(n)}(0, \Sigma_u)$, o wektorze wartości oczekiwanych równym wektorowi zerowemu, $E(u_t) = 0$, i macierzy kowariancji $E(u_t u_t') = \Sigma_u$, o wymiarach $(n \times n)$; $E(u_t u_{t-j}') = 0$, Φ jest macierzą $((1 + np) \times n)$ współczynników autoregresji wektorowej. Model DSGE-VAR pozwala na równoczesne wnioskowanie *a posteriori* o parametrach autoregresji wektorowej Φ i Σ_u , parametrach θ modelu równowagi ogólnej i parametrze wagowym λ . W sytuacji kiedy parametr wagowy estymujemy, łączny rozkład *a posteriori* można zapisać jako:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta, \lambda | Y) = p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) p(\theta, \lambda | Y), \quad (2)$$

natomiast w modelach rozpatrywanych warunkowo względem λ mamy:

$$p(\Phi, \Sigma_u, \theta | Y, \lambda) = p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) p(\theta | Y, \lambda), \quad (3)$$

gdzie $p(\theta, \lambda | Y)$ i $p(\theta | Y, \lambda)$ są brzegowymi rozkładami *a posteriori* dla współczynników θ modelu równowagi ogólnej i dla parametru wagowego λ , w przypadku jego estymacji. Są to rozkłady o niestandardowych postaciach funkcji gęstości. Do aproksymacji brzegowych rozkładów *a posteriori* stosuje się algorytm Metropolisa i Hastingsa, (zob. np. Adjemian et al., 2008).

Wnioskowanie *a posteriori* dla Φ i Σ_u , przebiega warunkowo względem θ i λ . Funkcja gęstości łącznego rozkładu *a posteriori* jest proporcjonalna do iloczynu funkcji wiarygodności $\ell(\Phi, \Sigma_u | Y)$, w modelu autoregresji bez restrykcji, i gęstości rozkładu *a priori* $p(\Phi, \Sigma_u | \theta, \lambda)$, specyfikowanego warunkowo względem parametrów strukturalnych θ modelu równowagi ogólnej i parametru wagowego λ . Ma postać rozkładu macierzowego normalnego – odwróconego Wisharta:

$$p(\Phi, \Sigma_u | Y, \theta, \lambda) \propto \det(\Sigma_u)^{-[(1+\lambda)T+n+1]/2} \exp\{-0.5tr\{\Sigma_u^{-1}[(Y - X\Phi)'(Y - X\Phi) + \lambda T(\Gamma_{yy}^*(\theta) - \Phi' \Gamma_{xy}^*(\theta) - \Gamma_{yx}^*(\theta)\Phi + \Phi' \Gamma_{xx}^*(\theta)\Phi)]\}\}, \quad (4)$$

gdzie $\Gamma_{yy}^*(\theta)$, $\Gamma_{xy}^*(\theta)$ i $\Gamma_{xx}^*(\theta)$, oznaczają macierze niecentralnych momentów drugiego rzędu w pomocniczym modelu wektorowej autoregresji, naśladującym liniowe rozwiązanie modelu równowagi ogólnej (zob. Wróbel-Rotter, 2013b). Spełnienie warunku: $\lambda \geq \lambda_{min}$, gdzie $\lambda_{min} = (1 + np + n)/T$, oraz odwracalność macierzy momentów $\Gamma_{xx}^*(\theta)$, oznaczają, że otrzymany rozkład jest właściwy oraz niezdegenerowany. Jeśli $\lambda = 0$ to model połączony sprowadza się do wektorowej autoregresji bez restrykcji,

natomiast jeśli $0 < \lambda < \lambda_{min}$ to otrzymany rozkład *a priori* jest niewłaściwy. Metodologia pozwalająca na połączenie wnioskowania na podstawie estymowanych modeli równowagi ogólnej z modelami wektorowej autoregresji została zaproponowana w pracy Del Negro i Schorfheide (2004) i następnie rozwinięta przez Del Negro et al. (2007). Szczegółowe omówienie strony metodologicznej dla prezentowanych poniżej rezultatów empirycznych zawiera np. praca Wróbel-Rotter (2013b).

Przyjęcie alternatywnych wartości parametru wagowego w modelach szacowanych warunkowo względem λ prowadzi do powstania szeregu modeli, określających różny stopień uchylecia restrykcji ekonomicznych, z których za najbardziej prawdopodobny *a posteriori* przyjmuje się taki, który prowadzi do najwyższego poziomu brzegowej gęstości obserwacji. W praktyce ustala się arbitralnie niezbyt liczny zbiór wartości, $\Lambda = \{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$, przyjmując jako oszacowanie $\hat{\lambda}$ wartość spełniającą warunek: $\hat{\lambda} = \arg \max_{\lambda > 0} p(Y|\lambda)$, (por. np. Christiano, 2007). Formalny wybór najlepszego modelu dokonuje się poprzez czynniki Bayesa: $B_{ij} = p(Y|M_i) / p(Y|M_j)$, które, w przypadku jednakowych prawdopodobieństw *a priori* modeli w zbiorze Λ (i spełnienia warunku sumowania się ich do jedności), redukują się do ilorazów brzegowych gęstości obserwacji $p(Y|M_i)$ w modelach warunkowych względem λ_i i λ_j . Znaczne wartości $\hat{\lambda}$ i iloraz czynnika Bayesa, dla $\lambda = \hat{\lambda}$ względem $\lambda = \infty$, bliski jedności, wskazują na adekwatność w świetle danych restrykcji wynikających z modelu równowagi ogólnej. Analogiczny schemat wnioskowania można przeprowadzić w modelach, w których parametr wagowy jest estymowany.

3. ESTYMOWANY MODEL RÓWNOWAGI OGÓLNEJ

Do konstrukcji rozkładu *a priori* dla wektorowej autoregresji wykorzystano prosty model nowo-keynesowski, zaproponowany w artykule Ercega et al. (2000), wykorzystywany również do ilustracji zagadnień estymacyjnych w pracy Rabanala i Rubio-Ramíreza (2005) i służący jako podstawa do budowy bardziej skomplikowanych systemów, m.in. przez Christiano et al. (2005). Szczegółowe omówienie podstaw teoretycznych wraz z wyprowadzeniem równań strukturalnych modelu można znaleźć m.in. w pracach: Wróbel-Rotter (2011a), (2011c), (2012b), sposoby doboru rozkładu *a priori* dla wag i parametru wagowego wraz z omówieniem ich wpływu na funkcje odpowiedzi impulsowych zawierają prace: Wróbel-Rotter (2013c), (2013d). Ogólną charakterystykę estymowanych modeli równowagi ogólnej można znaleźć m.in. w pracach Wróbel-Rotter (2012c), (2012d) oraz we wcześniejszych opracowaniach: Wróbel-Rotter (2007c), (2007a), (2007b), (2008), zaś stronę estymacyjną i numeryczną omawiają m.in. Wróbel-Rotter (2011b), (2012a), (2013a).

Model, dla zmiennych zapisanych w formie procentowych odchyień od ich wartości w stanie ustalonym, składa się z następujących równań strukturalnych:

1. Równania Eulera wiążącego wzrost produkcji z realną stopą procentową:

$$y_t = E_t y_{t+1} - \sigma(r_t - E_t \pi_{t+1} + E_t g_{t+1} - g_t), \quad (5)$$

gdzie: y_t oznacza produkcję, E_t jest operatorem wartości oczekiwanej warunkowej względem zbioru informacji w momencie t , r_t nominalną stopę procentową, g_t zakłócenie w funkcji użyteczności, π_t wskaźnik inflacji, σ elastyczność międzyokresowej substytucji.

2. Funkcji produkcji i funkcji realnego kosztu krańcowego produkcji:

$$y_t = a_t + (1 - \alpha)n_t \quad \text{i} \quad mc_t = w_t^r + n_t - y_t, \quad (6)$$

gdzie: n_t oznacza liczbę przepracowanych godzin, a_t zakłócenie technologiczne, mc_t realny koszt krańcowy, w_t^r płaca realna, α udział kapitału w produkcji.

3. Krańcowej stopy substytucji między konsumpcją i liczbą przepracowanych godzin:

$$mrs_t = \sigma^{-1} y_t + \gamma n_t - g_t, \quad (7)$$

gdzie: γ jest odwrotnością elastyczności podaży pracy względem realnej płacy.

4. Równania inflacji cenowej:

$$\pi_t = \beta E_t (\pi_{t+1}) + \frac{(1 - \alpha)(1 - \theta) \beta (1 - \theta)}{\theta (1 + \alpha(\bar{\varepsilon} - 1))} (mc_t + \varepsilon_t^\pi), \quad (8)$$

gdzie: ε jest wartością w stanie ustalonym elastyczności substytucji pomiędzy różnymi kategoriami dóbr, ε_t^π jest zakłóceniem w narzucie cenowym, θ oznacza prawdopodobieństwo braku możliwości optymalizacji ceny w ustalonym okresie i β – czynnik dyskontujący.

5. Równania inflacji płacowej:

$$\pi_t^w = \beta E_t \pi_{t+1}^w + \frac{(1 - \beta \theta_w)(1 - \theta_w)}{\theta_w (1 + \gamma \varepsilon_w)} (mrs_t - w_t^r), \quad (9)$$

gdzie: θ_w jest prawdopodobieństwem braku możliwości optymalizacji płacy w ustalonym okresie czasu, ε_w jest elastycznością substytucji pomiędzy różnymi rodzajami kwalifikacji.

6. Reguły Taylora:

$$r_t = \rho_r r_{t-1} + (1 - \rho_r)(\gamma_\pi \pi_t + \gamma_y y_t) + \varepsilon_t^r, \quad (10)$$

gdzie γ_π i γ_y to odpowiedzi banku centralnego na odchylenia inflacji i produkcji od ich wartości w stanie stabilnym, ρ_r – parametr wygładzania, ε_t^r – zakłócenie losowe.

7. Równania łączącego wzrost płacy realnej z płacą nominalną i inflacją cenową:

$$w_t^r = w_{t-1}^r + \pi_t^w - \pi_t. \quad (11)$$

8. Procesów stochastycznych opisujących wzrost technologii i zmiany w preferencjach:

$$a_t = \rho_a a_{t-1} + \varepsilon_t^a \quad \text{i} \quad g_t = \rho_g g_{t-1} + \varepsilon_t^g, \quad (12)$$

gdzie: ε_t^a i ε_t^g oznaczają zakłócenia losowe.

Równania tworzą liniowy układ racjonalnych oczekiwań kształtowany w czasie przez wektor czterech zakłóceń strukturalnych: $\varepsilon_t^* = [\varepsilon_t^a \ \varepsilon_t^g \ \varepsilon_t^r \ \varepsilon_t^\pi]'$, o niezależnych, identycznych rozkładach normalnych, z odchyleniami standardowymi odpowiednio: σ_a , σ_g , σ_r oraz σ_π . Wektor θ wszystkich parametrów strukturalnych ma następującą postać: $[\alpha \ \sigma \ \beta \ \gamma \ \varepsilon \ \theta \ \rho_r \ \gamma_\pi \ \gamma_y \ \rho_a \ \rho_g \ \theta_w \ \varepsilon_w]'$. Model oszacowano, za zgodą autorów, na danych z gospodarki amerykańskiej, przygotowanych na potrzeby pracy Rabanala i Rubio-Ramíreza (2005), gdzie również rozważono jako jeden z przykładów model przyjęty w niniejszej aplikacji. Dane empiryczne obejmują 75 wartości kwartalnych, dotyczących krótkoterminowej stopy procentowej r_t^{obs} , realnej płacy w_t^{obs} , stopy wzrostu zagregowanej produkcji y_t^{obs} , i inflacji cenowej Δp_t^{obs} , i zostały pierwotnie zaczerpnięte z *Bureau of Labor Statistics* oraz *Federal Reserve System*. Równanie obserwacji zostało zapisane tak, aby $r_t^{obs} = r_t$, $w_t^{obs} = w_t^r$, $y_t^{obs} = y_t$ oraz $\pi_t^{obs} = \hat{\pi}_t$. Dwa pierwsze obserwacji zostało przeznaczonych na warunki początkowe, niezbędne do zapisania wektorowej autoregresji, co oznacza że wszystkie modele VAR oraz model równowagi ogólnej zostały oszacowane na tym samym zbiorze danych. Parametry rozkładów *a priori* i wartości parametrów kalibrowanych: $\beta = 0.99$, $\varepsilon = 6$, $\alpha = 0.36$ i $\varepsilon_w = 6$, zaczerpnięto z pracy Rabanala i Rubio-Ramíreza (2005). W szczególności przyjęto: odwrócony rozkład gamma dla parametru σ : $f_G(\sigma|0.67, 0.9)$, rozkłady normalne dla γ , γ_π i γ_y : $f_N(\gamma|1; 0, 5)$, $f_N(\gamma_\pi|1.5; 0, 5)$ i $f_N(\gamma_y|0, 125; 0, 125)$, rozkłady gamma dla θ i θ_w : $f_G(\theta|2; 1, 42)$ i $f_G(\theta_w|2; 1, 71)$, gdzie w nawiasach podano wartość oczekiwaną i odchylenia standardowe *a priori*, zgodnie z wymogami pakietu Dynare, w którym przeprowadzono wszystkie obliczenia, (zob. Adjemian et al., 2011). Dla ρ_r , ρ_a , ρ_g ,

σ_a , σ_g , σ_r i σ_π założono rozkłady jednostajne na przedziale (0,1). Logarytm brzegowej gęstości obserwacji w modelu równowagi ogólnej szacowanym indywidualnie jest równy 1046 i jest to wartość niższa, niż poziomy maksymalne uzyskane w modelach hybrydowych, prezentowanych poniżej. Prezentowane wartości nie są bezpośrednio porównywalne z tymi, które uzyskano w pracach: Wróbel-Rotter (2013c), (2013d) ze względu na wyższy rząd opóźnienia wektorowej autoregresji w niniejszej pracy, i w konsekwencji, nieco bardziej ograniczony szereg danych empirycznych.

4. MODELE WARUNKOWE I W PEŁNI ESTYMOWANE

Modele warunkowe zostały oszacowane względem wartości λ , dla której wagi: $W_i = \lambda_i / (1 + \lambda_i)$, określające udział informacji *a priori* z modelu równowagi ogólnej w modelu hybrydowym, zawierają się w przedziale od 15% do 99%, spełniając warunek $\lambda > \lambda_{min}$ dla wszystkich z dwunastu rozważonych rzędów opóźnień wektorowej autoregresji, $p = 1, \dots, 12$. Wzrost minimalnego λ , wynikający z warunków istnienia rozkładu *a priori*, można interpretować jako konieczność zwiększenia stopnia jego informacyjności, rekompensującą większą elastyczność wektorowej autoregresji, spowodowaną wzrostem liczby swobodnych parametrów, przy zwiększaniu rzędu jej opóźnienia. Modele z pełną estymacją parametru wagowego zostały rozważone przy założeniu *a priori* dla λ rozkładu jednostajnego, przesuniętego gamma i rozkładu beta, uogólnionego na dowolny przedział na dodatniej półosi, wraz z analizą wrażliwości wnioskowania *a posteriori* na zmianę ich parametrów *a priori*. Rząd opóźnienia wektorowej autoregresji jest wybierany w oparciu o kryterium empiryczne maksymalizujące logarytm brzegowej gęstości obserwacji.

5. BRZEGOWA GĘSTOŚĆ OBSERWACJI W MODELACH WARUNKOWYCH

Estymację hybrydowej wektorowej autoregresji przeprowadzono warunkowo względem zbioru osiemnastu arbitralnie wybranych wartości parametru wagowego λ , które wraz z odpowiadającymi im wagami rozkładu *a priori* oraz uzyskanymi wartościami logarytmu brzegowej gęstości obserwacji *a posteriori* zawiera tabela 1. Najwyższy poziom logarytmu brzegowej gęstości obserwacji zanotowano dla $p = 6$ przy $\lambda = 1,5$, co odpowiada wadze informacji *a priori* pochodzących z modelu równowagi ogólnej równej 0,6. Logarytm brzegowej gęstości obserwacji ma tendencję do początkowego zwiększania się, by po osiągnięciu wartości maksymalnej, stopniowo zacząć maleć. Ocena optymalnego udziału informacji wstępnej, pochodzącej z modelu równowagi ogólnej, zależy od rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji: dla niższych wartości p oscyluje ona w granicach 30%–40%, dla opóźnień rzędu czwartego i piątego otrzymujemy około 50%, natomiast dla $p \geq 6$ optymalna waga rozkładu *a priori* mieści się w granicach 60%–70%. Oznacza to, że w miarę zwiększania się rzędu

opóźnienia wektorowej autoregresji i towarzyszącego szybkiego wzrostu liczby swobodnych parametrów niezbędne jest zwiększenie stopnia informacyjności rozkładu *a priori*, aby zapewnić odpowiednie modelowanie obserwacji. Porównanie kształtowania się logarytmu brzegowej gęstości obserwacji na przestrzeni różnych opóźnień wektorowej autoregresji pozwala na wybranie modelu o najwyższym jej poziomie, równym 1084,22, który w tym przypadku otrzymujemy dla $p = 6$ przy $\lambda = 1,5$, co odpowiada wadze rozkładu *a priori* równej 60%. Podobne bądź nieco niższe poziomy otrzymujemy również dla modeli: $p = 1$ i $\lambda = 0,67$, $p = 2$ i $\lambda = 0,43$, $p = 4$ i $p = 5$ dla $\lambda = 1$, $p = 7$ i $\lambda = 2,33$, co oznacza że można je w przybliżeniu traktować jako równie dobrze opisujące przyjęte dane.

Widoczna jest tendencja, w której w miarę zwiększania rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji, powyżej ósmego, logarytm brzegowej gęstości obserwacji wykazuje tendencję do przyjmowania niższych wartości, co oznacza że modele wektorowej autoregresji o znacznej liczbie parametrów, pomimo przyjęcia dla nich silnie informacyjnego rozkładu *a priori* generowanego z modelu strukturalnego, wyrażającego się założeniem wysokiej wartości dla λ , są mniej preferowane w świetle danych, niż modele o umiarkowanej parametryzacji, nawet z nieco mniej informacyjnym rozkładem *a priori*, korespondującym z niższymi wartościami parametru wagowego. Najniższe poziomy brzegowej gęstości obserwacji odnotowano dla modeli o najwyższych rzędach opóźnień przy niskich wartościach parametru wagowego; w tym przypadku wzrost stopnia informacyjności rozkładu *a priori* skutkuje silniejszym zwiększeniem się oceny brzegowej gęstości obserwacji, w porównaniu z modelami o krótszych rzędach opóźnień. Niezależnie od rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji obserwowane są pewne nieregularności w kształtowaniu się logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, co zostało omówione szczegółowiej, wraz z prezentacją bayesowskiego porównywania modeli, w pracy: Wróbel-Rotter (2013c). Porównywanie modeli za pomocą czynników Bayesa może prowadzić do mało interpretowalnych z ekonomicznego punktu widzenia rezultatów, ponieważ ich wartości mogą się istotnie zmieniać w odpowiedzi nawet na niewielkie zmiany wagi rozkładu *a priori*. Otrzymane rezultaty empiryczne wskazują, że restrykcje wynikające z estymowanego modelu równowagi ogólnej są częściowo potwierdzane przez obserwacje, jednak również obecne są korzyści wynikające z giętkości wektorowej autoregresji bez restrykcji, zaś sam model strukturalny wykazuje pewien stopień niepoprawnej specyfikacji.

Tabela 1.

Logarytm brzegowej gęstości obserwacji w modelach warunkowych

λ	W	p=1	p=2	p=3	p=4	p=5	p=6	p=7	p=8	p=9	p=10	p=11	p=12
0,18	0,15	1074,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,25	0,2	1057,9	1063,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,33	0,25	1068,6	1075,0	1073,8	-	-	-	-	-	-	-	-	-
0,43	0,3	1075,9	1082,8	1077,6	1059,2	1055,6	-	-	-	-	-	-	-
0,54	0,35	1083,7	1081,0	1072,5	1074,4	1059,6	1058,1	1051,1	-	-	-	-	-
0,67	0,4	1083,9	1076,5	1078,2	1069,0	1076,4	1074,2	1060,8	1046,9	1030,2	-	-	-
0,82	0,45	1082,7	1069,8	1075,5	1072,3	1076,0	1077,3	1067,8	1052,4	1051,2	1046,0	1014,5	-
1	0,5	1071,4	1080,1	1061,5	1081,4	1082,0	1080,7	1073,0	1066,0	1062,5	1054,3	1045,2	1046,8
1,22	0,55	1073,2	1066,8	1071,9	1075,0	1079,4	1057,5	1075,9	1058,5	1063,8	1060,3	1063,3	1060,5
1,50	0,6	1065,9	1074,3	1076,4	1070,1	1079,2	1084,2	1072,8	1076,8	1060,7	1070,4	1057,0	1061,9
1,86	0,65	1069,9	1069,2	1073,8	1067,5	1077,6	1083,0	1076,6	1077,0	1072,4	1066,8	1070,2	1062,4
2,33	0,7	1054,4	1065,8	1076,5	1072,9	1064,1	1071,8	1081,1	1063,4	1068,9	1070,5	1075,8	1074,0
3	0,75	1066,2	1067,6	1073,8	1070,4	1060,3	1074,9	1077,9	1071,8	1072,4	1066,7	1044,5	1067,2
4	0,8	1057,7	1064,1	1063,3	1061,0	1065,0	1052,7	1060,3	1064,9	1062,5	1066,9	1065,1	1071,8
5,67	0,85	1065,2	1059,7	1064,3	1065,6	1058,2	1054,1	1060,7	1060,1	1059,8	1059,5	1064,8	1060,9
9	0,9	1053,7	1053,3	1043,2	1058,4	1058,1	1056,7	1055,2	1051,2	1057,5	1055,5	1057,7	1056,0
19	0,95	1055,6	1053,8	1045,4	1050,4	1050,8	1053,3	1053,2	1046,7	1049,8	1039,9	1052,4	1048,9
100	0,99	1053,6	1052,5	1045,4	1054,1	1047,5	1046,9	1051,8	1045,0	1043,7	1033,9	1044,5	1048,0

Źródło: opracowanie własne.

6. BRZEGOWA GĘSTOŚĆ OBSERWACJI
W MODELACH Z ESTYMOWANYM PARAMETREM WAGOWYM

Estymacja hybrydowego modelu wektorowej autoregresji dla konkurencyjnych specyfikacji *a priori* dla λ ma na celu ocenę kształtowania się logarytmu brzegowej gęstości obserwacji, wartości oczekiwanej *a posteriori* dla wag W modelu strukturalnego w połączonym i parametru wagowego λ , w dwojaki sposób: w zależności od typu założonego rozkładu *a priori* oraz w zależności od stopnia jego rozproszenia, przy utrzymaniu tej samej tendencji centralnej. Na potrzeby symulacji dla λ przyjęto następujące rozkłady, w których $p_3 \geq \lambda_{\min}$ i $p_4 > p_3$ określają ich nośnik (ang. *support*):

- jednostajny $U(p_3, p_4)$ na przedziale $[p_3, p_4]$, dla którego wartość oczekiwana jest równa: $\mu_U = (p_3 + p_4)/2$ i odchylenie standardowe $\sigma_U = (p_4 - p_3)/\sqrt{12}$.
- przesunięty rozkład gamma, $f_{GG}(\lambda|\mu_{GG}, \sigma_{GG}, p_3)$, gdzie μ_{GG} oznacza jego wartość oczekiwaną, σ_{GG} jest odchyleniem standardowym, p_3 oznacza trzeci parametr rozkładu, określający jego nośnik: $[p_3, +\infty)$.
- rozkład beta $f_{BB}(\lambda|\mu_{BB}, \sigma_{BB}, p_3, p_4)$, zmodyfikowany w taki sposób, aby jego nośnik określał przedział $[p_3, p_4]$; μ_{BB} oznacza wartość oczekiwaną, σ_{BB} jest odchyleniem standardowym, p_3 i p_4 oznaczają trzeci i czwarty parametr rozkładu.

Parametry rozkładu gamma określonego na dodatniej półosi: $g_G(\lambda|\mu_G, \sigma_G)$, gdzie μ_G i σ_G oznaczają odpowiednio: wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe, są związane z parametrami rozkładu przesuniętego zależnością: $\mu_G = \mu_{GG} - p_3$, $\sigma_G = \sigma_{GG}$ i $p_3 = 0$. Rozkład gamma $f_G(\lambda|g_1, g_2)$, który jest określany przez parametry g_1 i g_2 , gdzie $2g_1$ wyraża liczbę stopni swobody, jest związany z rozkładem $g_G(\lambda|\mu_G, \sigma_G)$, zależnościami: $\mu_G = g_1 g_2$, $\sigma_G = g_1^{1/2} g_2$, skąd otrzymujemy: $g_1 = \mu_G^2 / \sigma_G^2$ i $g_2 = \sigma_G^2 / \mu_G$. Analogicznie, w zmodyfikowanym rozkładzie beta $f_{BB}(\lambda|\mu_{BB}, \sigma_{BB}, p_3, p_4)$ możemy przejść z jego postaci określonej na przedziale $[p_3, p_4]$ na postać określoną na przedziale $[0, 1]$: $b_{BB}(\lambda|\mu_B, \sigma_B)$, gdzie μ_B i σ_B oznaczają odpowiednio wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe, korzystając z zależności: $\mu_B = (\mu_{BB} - p_3)/(p_4 - p_3)$ i $\sigma_B = \sigma_{BB}/(p_4 - p_3)$. Parametry b_1 i b_2 zwykłego rozkładu beta: $f_B(\lambda|b_1, b_2)$ otrzymujemy korzystając z formuły na wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe: $\mu_B = b_1/(b_1 + b_2)$ i $\sigma_B = (b_1 b_2 / ((b_1 + b_2 + 1)(b_1 + b_2)^2))^{1/2}$, (por. np. Poirier, 1995). Znajomość parametrów b_1 i b_2 może ułatwić ocenę przyjętego kształtu rozkładu dla parametru wagowego λ . Wartość oczekiwana μ_{BB} i odchylenie standardowe σ_{BB} zmodyfikowanego rozkładu beta są związane z parametrami zwykłego rozkładu beta na przedziale od zera do jeden następującymi zależnościami:

$$\mu_{BB} = p_3 + (p_4 - p_3) \frac{b_1}{b_1 + b_2} \quad \text{oraz} \quad \sigma_{BB} = \frac{p_4 - p_3}{b_1 + b_2} \left(\frac{b_1 b_2}{b_1 + b_2 + 1} \right)^{0.5}. \quad (13)$$

7. USTALENIE OPTYMALNEGO RZĘDU OPÓZNIENIA

Optymalny rząd opóźnienia wektorowej autoregresji w modelach z pełną estymacją parametru wagowego może się różnić od tego, który został otrzymany w modelach szacowanych warunkowo. Ustalenie p prowadzącego do maksymalizacji brzegowej gęstości obserwacji wymaga zapewnienia jak najbardziej porównywalnego rozkładu *a priori* dla parametru wagowego, stąd dolną granicę p_3 , zmieniającą się wraz ze zmianą rzędu opóźnienia autoregresji ustalono na poziomie λ_{\min} . W przypadku rozkładu jednostajnego górna granica została arbitralnie ustalona na poziomie $p_4=19$, co oznacza że udział informacji *a priori*, z modelu równowagi ogólnej w hybrydowym, wynosi maksymalnie 95%. Wartość oczekiwana tak określonego rozkładu jednostajnego nieco wzrasta w miarę zwiększania się liczby swobodnych parametrów połączonej wektorowej autoregresji, od wartości 9,6 dla $p=1$ do 9,9 dla $p=12$. Możliwa byłaby specyfikacja parametrów *a priori* tak, aby wartość oczekiwana wagi W była równa np. 50%, co odpowiada $\lambda=1$, jednak w przypadku wyższych rzędów opóźnień, wartość ta jest bardzo bliska dolnej granicy λ_{\min} , w szczególności dla $p=12$ jest to pierwsza wartość uwzględniona w modelach warunkowych, (tabela 1). W przypadku rozkładów przesuniętego gamma i zmodyfikowanego beta wartość oczekiwaną *a priori* przyjęto na poziomie równym 10, odchylenia standardowe *a priori* zostały ustalone arbitralnie na poziomie odpowiednio $\sigma_{GG}=4,47$ i $\sigma_{BB}=4,24$, (tabela 3), natomiast nośnik zmodyfikowanego rozkładu beta został przyjęty tak, jak w rozkładzie jednostajnym. Przyjęte rozkłady mają wspólną tendencję centralną, rozkład jednostajny i beta są określone na tym samym przedziale.

Uzyskane poziomy logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w zależności od rzędu opóźnienia hybrydowej wektorowej autoregresji i rodzaju rozkładu *a priori* dla λ , wraz z wartościami oczekiwanymi *a posteriori* parametru wagowego λ i wag W zawiera tabela 2. Najwyższe wartości logarytmu zmodyfikowanej średniej harmonicznnej w przypadku rozkładu jednostajnego obserwujemy dla $p=8$, nieco niższe wartości występują dla $p=6$ i $p=7$ oraz $p=4$. Oznacza to, że przy założonym rozkładzie jednostajnym wektorowa autoregresja rzędu ósmego najlepiej opisuje obserwacje. W przypadku rozkładu gamma najwyższy poziom oszacowania brzegowej gęstości obserwacji odnotowano dla $p=5$, wysokie wartości występują również dla $p=12$, $p=7$ i $p=2$. W przypadku zmodyfikowanego rozkładu beta najwyższe oceny *a posteriori* otrzymujemy dla $p=7$, a następnie dla $p=2$, $p=6$ i $p=4$. W każdym z przypadków wyższym rzędem opóźnień wektorowej autoregresji odpowiadają wyższe udziały informacji *a priori* pochodzącej z modelu równowagi ogólnej, wahające się w granicach od 13% do 69% w przypadku rozkładu jednostajnego, w przypadku rozkładu gamma od 26% do 74% i dla rozkładu beta od 33% do 73%. Wybór optymalnego rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji zależy od tego, jaki przyjęto typ rozkładu *a priori* dla parametru wagowego. Zwykle w praktyce preferuje się modele prostsze, stąd należałoby wziąć pod uwagę opóźnienie rzędu drugiego, czy też czwartego, jednak wydaje się, że model dla $p=7$ znajduje się w grupie o najwyższych oszaco-

waniach brzegowych gęstości obserwacji dla wszystkich rozpatrzonych typów rozkładu *a priori* dla λ , co powoduje że zostanie przyjęty do ilustracji dalszych wyników empirycznych. Modele o wysokich wartościach ocen brzegowej gęstości obserwacji, w przypadku estymacji parametru wagowego, zawierają wektorową autoregresję rzędu szóstego, stąd w pewnej mierze potwierdzają rezultaty uzyskane na podstawie estymacji modeli warunkowych.

Tabela 2.

Logarytm brzegowej gęstości obserwacji w zależności od rzędu opóźnienia w modelach estymowanych

Rząd opóźnienia	Rozkład jednostajny			Rozkład gamma			Rozkład beta		
	p(Y)	E(λY)	W	p(Y)	E(λY)	W	p(Y)	E(λY)	W
p=1	1020,65	0,15	0,13	1029,58	0,34	0,26	1063,34	0,50	0,33
p=2	1066,60	0,58	0,37	1074,05	1,00	0,50	1077,10	0,79	0,44
p=3	1058,15	0,70	0,41	1067,24	1,20	0,55	984,15	0,33	0,25
p=4	1072,54	1,06	0,51	1072,37	1,40	0,58	1075,80	1,23	0,55
p=5	1050,84	1,07	0,52	1076,26	1,76	0,64	1074,99	1,44	0,59
p=6	1073,74	1,30	0,57	1073,98	1,55	0,61	1075,92	1,47	0,60
p=7	1073,52	1,77	0,64	1074,56	1,94	0,66	1078,66	1,74	0,63
p=8	1077,57	1,98	0,66	1067,88	1,97	0,66	1032,98	1,48	0,60
p=9	1058,69	2,19	0,69	1046,37	1,76	0,64	1074,10	2,36	0,70
p=10	1062,27	2,26	0,69	1068,43	2,83	0,74	1040,87	1,88	0,65
p=11	1039,92	1,79	0,64	1063,18	2,65	0,73	1040,85	1,86	0,65
p=12	1054,58	2,07	0,67	1074,78	2,85	0,74	1074,45	2,68	0,73

Źródło: opracowanie własne.

8. ROZPROSZENIE ROZKŁADU A PRIORI DLA PARAMETRU WAGOWEGO

Ocena kształtowania się brzegowej gęstości obserwacji w zależności od rozproszenia rozkładu *a priori* dla parametru wagowego została przeprowadzona dla dwudziestu arbitralnie wybranych wartości oczekiwanych *a priori* $E(\lambda)$ oraz odpowiednio dobranych odchyłeń standardowych, których wartości zawiera tabela 3. Rozkłady jednostajne i beta są określone na ograniczonym przedziale $[p_3, p_4]$, natomiast nośnik rozkładu gamma $[p_3, +\infty)$ jest przedziałem z góry nieograniczonym, co powoduje trudności w zapewnieniu porównywalności ich rozproszenia, stąd parametry *a priori* przyjęto tak, aby tendencja centralna tych rozkładów i rozkładu jednostajnego pokrywała się. Oznacza to, przyjęcie równości wartości oczekiwanych *a priori*: $\mu_U = \mu_{GG} = \mu_{BB}$, przy założeniu $p_3 = \lambda_{\min} = 0,53$ dla $p=7$, celem zapewnienia istnienia

rozkładu *a priori* z modelu strukturalnego. Dla $\mu_U = \mu_{GG} = \mu_{BB}$, przyjęto zakres od 1 do 20 z krokiem 1, co oznacza że otrzymujemy 20 różnych przypadków, odpowiadających wagom informacji *a priori* z modelu strukturalnego wahającym się od 50% do 95%. Dla rozkładu jednostajnego, po wykorzystaniu formuły na wartość oczekiwaną μ_U i przyjęciu $p_3 = 0,53$ dla $p = 7$, implikują one wartości górnej granicy p_4 od 1,53 do 39,47, z krokiem 2, oznaczające zmianę odchylenia standardowego *a priori* σ_U od 0,27 do 11,24.

Specyfikacja odchylenia standardowego σ_G uogólnionego rozkładu gamma $f_{GG}(\lambda | \mu_{GG}, \sigma_G, p_3)$, wykorzystuje zwykły rozkład gamma $f_G(\lambda | g_1, g_2)$, w którym ustalono parametr $g_2 = 2$, oznaczający że rozważamy rozkłady χ^2 o $2g_1$ stopniach swobody, oraz formułę na odchylenie standardowe: $\sigma_G = g_1^{1/2} g_2$. Wartość parametru g_1 ustalono po wykorzystaniu zależności $g_1 = \mu_G / g_2$ i $\mu_G = \mu_{GG} - p_3$, dla $p_3 = 0,47$. Otrzymujemy w ten sposób ciąg przesuniętych rozkładów gamma, o wartości oczekiwanej μ_{GG} wahającej się w granicach od 1 do 20 i stopniowo zwiększającym się odchyleniu standardowym σ_G od około 1,41 do 6,32. Wartości parametrów rozkładu: $f_{BB}(\lambda | \mu_{BB}, \sigma_{BB}, p_3, p_4)$ uzyskano po transformacji, symetrycznego wokół wskaźnika tendencji centralnej, rozkładu beta: $f_B(\lambda | b_1, b_2)$, w którym $b_1 = b_2 = 0,5$, na przedziały określone przez granice $p_3 = 0,53$ i p_4 , przy czym p_4 przyjęto tak, jak w przypadku rozkładu jednostajnego, w zakresie od 1,53 do 39,53. Wykresy funkcji gęstości przyjętych rozkładów przedstawia rys. 1. Sposoby doboru rozkładów *a priori* dla λ wraz z dyskusją ich wpływu na rozkład *a priori* dla wag W , oraz prezentację uzyskanych brzegowych rozkładów *a posteriori* dla W , zawiera praca Wróbel-Rotter (2013c).

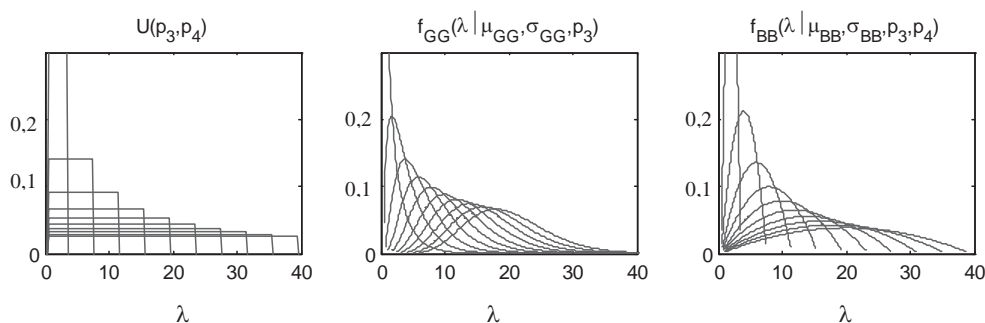
Tabela 3.

Parametry rozkładów *a priori* do estymacji parametru wagowego

E(λ)	Dolna granica		Górna granica		
	p_3	p_4	σ_U	σ_{GG}	σ_{BB}
1	0,53	1,47	0,27	1,41	0,21
2	0,53	3,47	0,85	2,00	0,66
3	0,53	5,47	1,43	2,45	1,10
4	0,53	7,47	2,00	2,83	1,55
5	0,53	9,47	2,58	3,16	2,00
6	0,53	11,47	3,16	3,46	2,45
7	0,53	13,47	3,74	3,74	2,89
8	0,53	15,47	4,31	4,00	3,34
9	0,53	17,47	4,89	4,24	3,79
10	0,53	19,47	5,47	4,47	4,24
11	0,53	21,47	6,04	4,69	4,68

$E(\lambda)$	Dolna granica	Górna granica	Odchylenia standardowe <i>a priori</i>		
	p_3	p_4	σ_U	σ_{GG}	σ_{BB}
12	0,53	23,47	6,62	4,90	5,13
13	0,53	25,47	7,20	5,10	5,58
14	0,53	27,47	7,78	5,29	6,02
15	0,53	29,47	8,35	5,48	6,47
16	0,53	31,47	8,93	5,66	6,92
17	0,53	33,47	9,51	5,83	7,37
18	0,53	35,47	10,09	6,00	7,81
19	0,53	37,47	10,66	6,16	8,26
20	0,53	39,47	11,24	6,32	8,71

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 1. Rozkłady *a priori* przyjęte do estymacji parametru wagowego

Źródło: opracowanie własne.

Najwyższą wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji dla jednostajnego rozkładu *a priori* dla λ , równą 1079,6, otrzymujemy dla przedziału od 0,53 do 23,47, implikującego $E(\lambda)=12$. W grupie rozkładów beta najwyższą wartość $p(Y)$ równą 1082,1, zarejestrowano dla rozkładu określonego na przedziale od 0,53 do 5,47, dla którego $E(\lambda)=3$, natomiast w przypadku rozkładu gamma maksymalna wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji wynosi 1080 i została uzyskana dla $E(\lambda)=2$. Czynniki Bayesa B_{ij} modelu z rozkładem beta, o najwyższej wartości $p(Y)$, obliczony względem najlepszego modelu z rozkładem gamma jest równy 11,6, natomiast względem modelu z jednostajnym rozkładem *a priori* dla λ , maksymalizującego logarytm brzegowej gęstości obserwacji, jest on równy 12. Oznacza to, że model ze zmodyfikowanym rozkładem beta dla λ około dwunastokrotnie lepiej opisuje obserwacje niż model z rozkładem gamma i jednostajnym. Modele o najwyższych wartościach

logarytmu brzegowej gęstości obserwacji w przypadku rozkładu gamma i jednostajnego prowadzą do czynnika Bayesa równego 1,04, co oznacza że przy założeniu jednakowych prawdopodobieństwa *a priori*, ich prawdopodobieństwa *a posteriori* można uznać za jednakowe. Najwyższą ocenę brzegowej gęstości obserwacji uzyskał model ze zmodyfikowanym rozkładem beta, który z jednej strony ma ograniczony nośnik, określony przez ustalony przedział $[p_3, p_4]$, zaś z drugiej strony jego kształt umożliwia większe zróżnicowanie informacji *a priori* niż w przypadku rozkładu jednostajnego. Porównanie ocen brzegowej gęstości obserwacji dla danej wartości oczekiwanej *a priori* $E(\lambda)$ prowadzi do wniosku, że dla rozkładu beta, w 13 przypadkach, jest ona wyższa niż po założeniu rozkładu gamma i jednostajnego. W 9 przypadkach rozkład gamma prowadzi do wyższej wartości logarytmu brzegowej gęstości obserwacji niż rozkład jednostajny. Szczegóły uzyskanych obliczeń dla $p=7$ zawiera tabela 4, Hpd_d i Hpd_g oznaczają odpowiednio dolną i górną granicę 90% przedziału o największej gęstości *a posteriori* (ang. highest posterior density); rezultaty otrzymane dla innych rzędów opóźnień nie różnią się jakościowo.

9. OCENA STABILNOŚCI NUMERYCZNEJ

Schemat estymacji w modelach DSGE-VAR, rozpatrywanych warunkowo względem parametru wagowego, został przedstawiony w pracy Schorfheide (2000), a następnie dostosowany do potrzeb pełnej estymacji λ w pakiecie Dynare, (zob. Adjemian et al., 2011). Metody Monte Carlo oparte na łańcuchach Markowa, w szczególności algorytm Metropolisa i Hastingsa, są stosowane do przybliżania niestandardowej gęstości prawdopodobieństwa $p(\theta, \lambda|Y)$, występującej w równaniu (2), niezbędnej do uzyskania charakterystyk łącznego rozkładu *a posteriori* (2). Ocena jakości numerycznej aproksymacji rozkładu *a posteriori* dla θ i λ jest kluczowa dla poprawności rezultatów uzyskanych z połączonej wektorowej autoregresji i jest ściśle zależna od danej aplikacji empirycznej. Techniki weryfikacji funkcjonowania algorytmów numerycznych zostały przedstawione na przykładzie wektorowej autoregresji, w której odnotowano najwyższą wartość logarytmu brzegowej gęstości obserwacji: modelu ze zmodyfikowanym rozkładem beta, w którym $E(\lambda)=3$ i $p=7$, (tabela 4). Stosowane techniki weryfikacji mają na celu odpowiedzenie na ogólne pytanie, czy uzyskaną próbkę losową można traktować jako pochodzącą z brzegowego rozkładu *a posteriori* $p(\theta, \lambda|Y)$. W przypadku modeli estymowanych warunkowo względem λ oceny stabilności numerycznej dokonuje się analogicznie, dla brzegowego rozkładu *a posteriori* $p(\theta|Y, \lambda)$, występującego we wzorze (3). Ocenę zbieżności numerycznej w modelu DSGE-VAR można traktować jako kontynuację pracy Wróbel-Rotter (2012a), w której omówiono zastosowanie metod weryfikacji funkcjonowania algorytmu Metropolisa i Hastingsa w modelu DSGE.

Oceny funkcjonowania procedury numerycznej aproksymacji charakterystyk rozkładu *a posteriori* w modelu DSGE-VAR najczęściej dokonuje się nieformalnie,

Tabela 4.
Wyniki estymacji parametru wagowego

E(λ)	Rozkład jednostajny					Rozkład gamma					Rozkład beta				
	E(λY)	Hpd _d	Hpd _g	W	p(Y)	E(λY)	Hpd _d	Hpd _g	W	p(Y)	E(λY)	Hpd _d	Hpd _g	W	p(Y)
1	1,15	0,94	1,36	0,54	1066	0,86	0,85	0,88	0,46	1014	1,24	1,04	1,45	0,55	1081
2	1,41	1,22	1,58	0,59	1074	1,54	1,04	2,03	0,61	1080	1,54	1,21	1,83	0,61	1078
3	1,68	1,14	2,18	0,63	1078	1,21	0,88	1,50	0,55	1037	1,70	1,14	2,25	0,63	1082
4	1,47	1,07	1,89	0,60	1072	1,12	0,87	1,34	0,53	1046	1,72	1,20	2,24	0,63	1081
5	1,53	1,07	1,97	0,60	1078	1,64	1,06	2,21	0,62	1068	1,26	1,03	1,56	0,56	1057
6	1,47	1,08	1,87	0,60	1072	0,83	0,68	0,99	0,45	973	2,87	1,62	4,12	0,74	1068
7	1,41	1,05	1,79	0,59	1067	1,75	1,19	2,30	0,64	1076	1,51	1,08	1,91	0,60	1068
8	1,26	0,96	1,53	0,56	1051	1,91	1,28	2,53	0,66	1077	1,81	1,20	2,38	0,64	1079
9	1,46	1,02	1,89	0,59	1070	1,69	1,19	2,17	0,63	1062	1,37	1,11	1,67	0,58	1053
10	0,74	0,62	0,85	0,43	967	1,99	1,33	2,64	0,67	1078	1,75	1,17	2,32	0,64	1079
11	1,31	0,95	1,68	0,57	1048	2,01	1,24	2,70	0,67	1073	1,77	1,19	2,31	0,64	1077
12	1,63	1,13	2,12	0,62	1080	2,08	1,36	2,75	0,67	1075	1,60	1,10	2,07	0,61	1062
13	1,40	1,04	1,72	0,58	1050	1,94	1,32	2,58	0,66	1066	1,73	1,16	2,30	0,63	1071
14	1,72	1,14	2,27	0,63	1076	2,23	1,44	3,00	0,69	1074	1,44	1,07	1,83	0,59	1053
15	1,36	1,01	1,71	0,58	1060	2,19	1,40	2,86	0,69	1059	1,88	1,22	2,48	0,65	1075
16	0,64	0,56	0,71	0,39	943	2,01	1,23	2,77	0,67	1055	1,83	1,23	2,41	0,65	1079
17	1,27	0,96	1,59	0,56	1056	2,39	1,53	3,25	0,70	1069	1,75	1,21	2,30	0,64	1076
18	1,59	1,11	2,08	0,61	1073	2,13	1,46	2,77	0,68	1060	1,45	1,06	1,84	0,59	1061
19	1,31	0,98	1,65	0,57	1052	1,78	1,30	2,25	0,64	1049	1,79	1,22	2,36	0,64	1079
20	1,46	1,06	1,86	0,59	1057	2,79	1,66	3,89	0,74	1068	1,46	1,06	1,86	0,59	1049

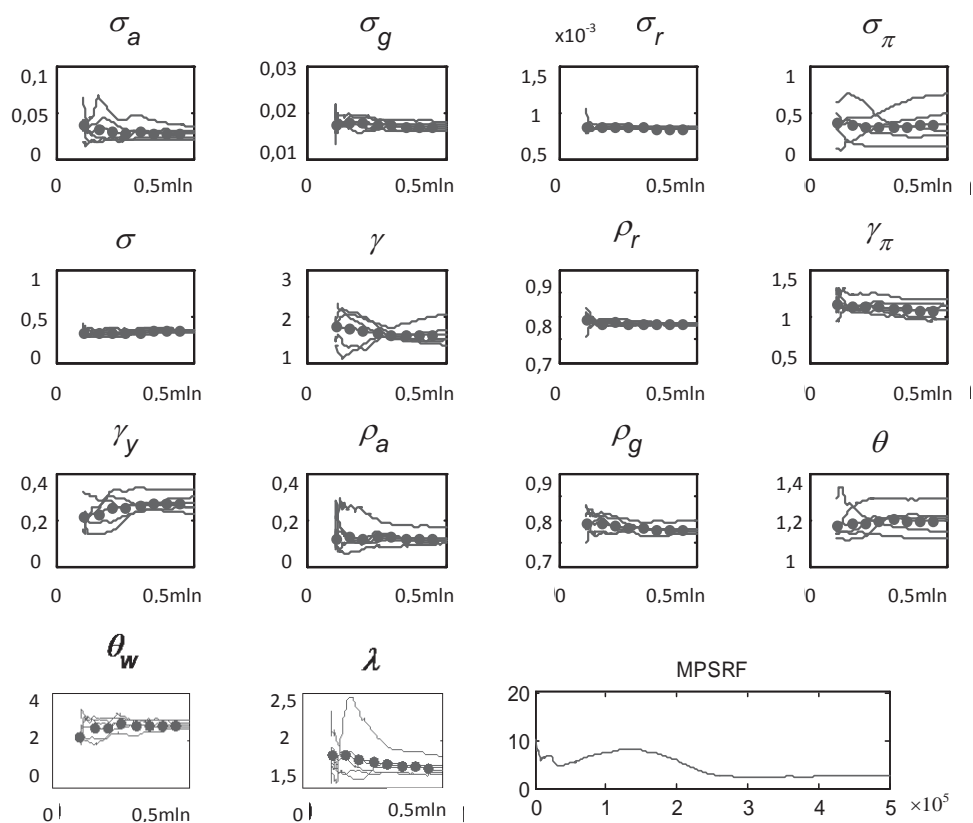
Źródło: opracowanie własne.

poprzez monitorowanie stabilizowania się łańcucha Markowa i jego zbieżności do rozkładu stacjonarnego, ocenę wpływu zmiany punktów startowych na wyniki końcowe, określenie ułamka akceptacji nowych stanów łańcucha oraz analizę wrażliwości związaną ze zmianą parametrów gęstości próbnej w algorytmie Metropolis i Hastingsa. Najprostszym i najpowszechniej stosowanym nieformalnym kryterium monitorowania zbieżności jest obserwacja przebiegu średnich ergodycznych parametrów strukturalnych, które wraz ze wzrostem liczby iteracji powinny się stabilizować na ustalonym poziomie, niezależnym od punktów startowych; są one również użytecznym narzędziem ustalania minimalnej liczby cykli wstępnych, po których wszystkie następne stany łańcucha traktujemy jako uzyskane z rozkładu stacjonarnego. Oceny zbieżności można również dokonać poprzez rozważenie jednowymiarowych statystyk, tzw. czynników potencjalnej redukcji skali, bazujących na ilorazach momentów centralnych rzędu s , określonych przez ich ilorazy obliczone dla realizacji z wszystkich łańcuchów Markowa oraz wartości średniej z szeregów indywidualnych, (por. np. Brooks i Gelman, 1998). Uogólnieniem jest wielowymiarowy czynnik potencjalnej redukcji skali (ang. *multivariate potential scale reduction factor*, MPSRF). Możliwe jest także rozważenie statystyki opartej na estymatorach przedziałowych szacowanych parametrów, $R_{\text{przedział}}$, określanej przez iloraz długości przedziałów ufności, o końcach określonych przez kwantyle rzędu $100(\alpha/2)\%$ i $100(1-\alpha/2)\%$, które zostały obliczone na podstawie wszystkich mn iteracji oraz średniej długości m przedziałów uzyskanych dla każdego z wygenerowanych łańcuchów, (zob. Adjemian et al., 2011). Szczegółowe omówienie formuł można znaleźć m.in. w pracy Wróbel-Rotter (2012a).

Modele rozpatrywane w pracy oszacowano wykonując w każdym 500 tys. symulacji w algorytmie Metropolis i Hastingsa. Całość symulacji była podzielona na pięć równoległych łańcuchów Markowa, których punkty startowe zostały uzyskane po losowaniu z rozkładu normalnego, skupionego wokół numerycznie wyznaczonej modalnej i macierzy kowariancji rozkładu *a posteriori*. Ich oszacowanie w tych modelach bywa trudne numerycznie, mogą zawodzić metody bazujące na algorytmach optymalizacyjnych typu Newtona, natomiast zadowalające wyniki zwykle otrzymuje się po wykorzystaniu techniki polegającej na losowym przeszukiwaniu przestrzeni parametrów za pomocą algorytmu Metropolis i Hastingsa, (www.dynare.org/dynare-wiki/montecarlooptimization). Liczbę wstępnych realizacji łańcucha Markowa zwykle ustala się arbitralnie jako ułamek wszystkich cykli, bądź też podaje się ich liczbę, w taki sposób aby zapewnić osiągnięcie zbieżności bazujące na przyjętych kryteriach jej oceny. Minimalna liczba cykli wstępnych wydaje się, w tym przypadku, nie przekraczać wartości około 100 tys., co oznacza udział 20%. Arbitralnie ustala się również liczbę równoległych łańcuchów Markowa, która ma za zadanie zmniejszenie wysokiej autokorelacji występującej przy stosowaniu metod MCMC oraz równocześnie sprawdzenie wrażliwości na punkty startowe.

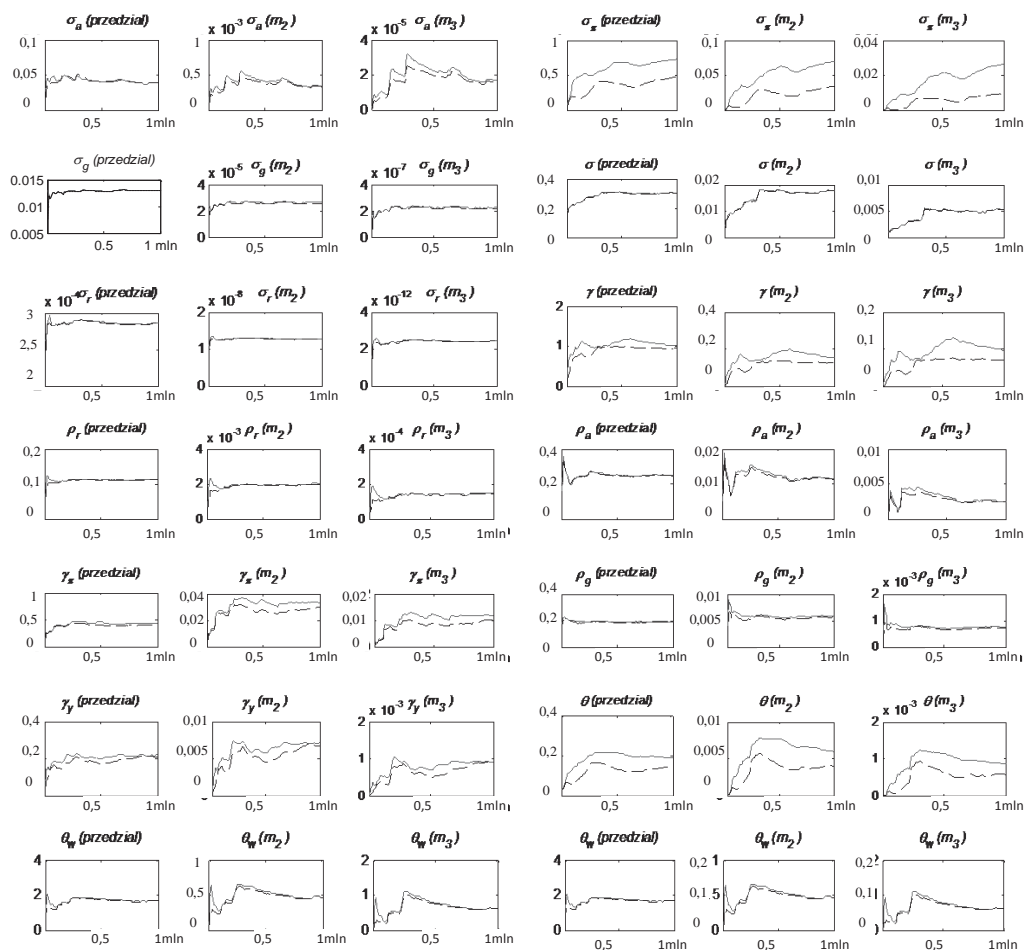
Średnie ergodyczne uzyskane na podstawie indywidualnych łańcuchów Markowa (linie ciągłe) i średnia ze wszystkich wygenerowanych wartości (linie ze znacznikami)

kami), obliczone po odrzuceniu cykli wstępnych, przedstawiono na rys. 2. Podstawą oceny zbieżności jest średnia obliczona na podstawie wszystkich wygenerowanych wartości, która wskazuje na znaczny stopień zbieżności łańcucha Markowa do rozkładu *a posteriori*. Wartości średnich obliczone z pominięciem i po uwzględnieniu cykli wstępnych są dla większości parametrów zbliżone; w przypadku parametrów θ i σ_π widoczna jest niewielka niestabilność numeryczna pojedynczych łańcuchów, przy czym dla θ jest to raczej wrażliwość na zmianę początkowych stanów łańcucha: indywidualne trajektorie są stabilne, jednak na innych poziomach. W przypadku pozostałych parametrów, w tym kluczowego w modelu DSGE-VAR parametru wagowego λ , można uznać, że średnie ergodyczne, obliczone na podstawie wszystkich wygenerowanych wartości, są stabilne po odrzuceniu dostatecznie dużej liczby iteracji wstępnych, przy czym najprecyzyjniej przebiegają one dla parametrów σ_r , σ i ρ .



Rysunek 2. Kształtowanie się średniej ergodycznej parametrów

Źródło: opracowanie własne.



Rysunek 3. Kształtowanie się czynników potencjalnej redukcji skali

Źródło: opracowanie własne.

Kształtowanie się zbieżności oparte na porównywaniu wariancji wewnątrz i międzyłańcuchowej przedstawia rys. 3, gdzie linia przerywana oznacza momenty centralne obliczone na podstawie wszystkich wygenerowanych wartości, natomiast ciągła średnią z momentów wewnątrzłańcuchowych; pokrywanie się linii na rys. 3 wskazuje na osiągnięcie zbieżności i wartości czynnika potencjalnej redukcji skali bliskie jedności. Rozpatrzono czynniki potencjalnej redukcji skali oparte na momentach centralnych rzędu drugiego (m_2) i trzeciego (m_3), oraz wartości $R_{\text{przedział}}$ oznaczające ilorazy długości empirycznych, 80%, przedziałów ufności. Najszybciej stabilizują się statystyki wielowymiarowe, MPSRF, które wskazują na zbieżność już po około 100 tys.

iteracji, podobnie jak indywidualne średnie ergodyczne. Statystyki jednowymiarowe, reprezentujące ocenę zbieżności dla odchylenia standardowego szoku cenowego σ_π , wykazują pewne cechy braku zbieżności: statystyki wewnątrz i międzyłańcuchowe nie stabilizują się w miarę wzrostu liczby iteracji, ich wartości nie pokrywają się, histogram aproksymujący brzegowy rozkład *a posteriori* wykazuje cechy nieregularności i wielomodalności, co potwierdza wnioski płynące z analizy średnich ergodycznych. Mniejsze problemy ze stabilnością numeryczną, ocenianą kształtowaniem się R_s , występują w przypadku parametrów: γ , γ_y , θ , θ_w i λ , natomiast w pozostałych przypadkach, pomimo pewnych fluktuacji numerycznych, statystyki jednowymiarowe można uznać za zbieżne. Analogiczne kształtowanie się zbieżności było widoczne po znacznym zwiększeniu liczby iteracji, co oznacza że poprawa strony numerycznej mogłaby teoretycznie nastąpić po ponownym skierowaniu uwagi na konstrukcję modelu równowagi ogólnej bądź też zmianę specyfikacji *a priori*, w szczególności: zamiast przyjętego *a priori* rozkładu jednostajnego dla σ_π można założyć odwrócony gamma. Modyfikacje specyfikacji *a priori* w analizowanym modelu nie doprowadziły do znaczącej poprawy stabilności, stąd wyniki empiryczne prezentujemy dla takich rozkładów, jakie zostały założone dla pierwotnej postaci modelu. Poprawność numeryczna może być również potwierdzona przez porównanie logarytmu brzegowej gęstości obserwacji za pomocą zmodyfikowanej średniej harmonicznej i aproksymacji Laplace'a, (por. np. Geweke, 1999), Tierney i Kadane, 1986). Aproksymacja Laplace'a stosowana jest bezpośrednio do rozkładu *a posteriori*, którego parametry wyznaczono za pomocą wstępnych metod numerycznych, prowadząc zwykle do niższej wartości brzegowej gęstości obserwacji, co oznacza że algorytm Metropolisa i Hastingsa znajduje wyższe położone maksimum rozkładu *a posteriori*. Zależność taka jest obserwowana w przypadku wszystkich modeli rozważanych w pracy. Ocena jakości punktów startowych niezbędnych do zapoczątkowania łańcucha Markowa, które zostały uzyskane po zastosowaniu procedur znajdujących wstępnie maksimum rozkładu *a posteriori* jest zwykle dokonywana graficznie, co zostało, w kontekście modelu DSGE, omówione m.in. w pracy Wróbel-Rotter (2012a).

10. PODSUMOWANIE

Model DSGE-VAR powstaje po przyjęciu rozkładu *a priori* pochodzącego z estymowanego modelu równowagi ogólnej do estymacji wektorowej autoregresji, przy czym kluczową rolę w konstrukcji odgrywa parametr wagowy, ustalający optymalne proporcje obydwu podejść. Wnioskowanie w modelu połączonym i oszacowanie brzegowej gęstości obserwacji może być zależne od sposobu traktowania *a priori* parametru wagowego: w modelach szacowanych warunkowo, jego ocena *a posteriori* jest wrażliwa na zmianę zbioru wartości *a priori*, natomiast w modelach z pełną estymacją, obserwujemy większą stabilność i mniejszą zależność od typu rozkładu *a priori*. Model o najwyższych wartościach logarytmu brzegowej gęstości obserwacji

uzyskano dla zmodyfikowanego rozkładu beta, modele z rozkładami gamma i jednostajnymi równie dobrze opisywały rozpatrywane obserwacje. W drugiej części pracy omówiono i zilustrowano techniki oceny funkcjonowania metod Monte Carlo opartych na łańcuchach Markowa, stosowanych do aproksymacji charakterystyk rozkładu *a posteriori*. Metody te wskazują na ogólną stabilność numeryczną, przy założeniu przeprowadzenia dostatecznie dużej liczby iteracji MCMC i odrzuceniu cykli wstępnych. Techniki weryfikacji zbieżności bazują głównie na ocenie kształtowania się średnich ergodycznych i wybranych funkcji momentów centralnych generowanego łańcucha, których stabilność w miarę wzrostu liczby iteracji i zmian ustawień generatora jest zazwyczaj dostatecznym warunkiem uznania zbieżności.

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

LITERATURA

- [1] Adjemian A., DarracqPariès M., Moyen S., (2008), Towards a Monetary Policy Evaluation Framework, *European Central Bank Working Paper* No. 942, Frankfurt am Main, Germany.
- [2] Adjemian S., Bastani H., Juillard M., Mihoubi F., Perendia G., Ratto M., Villemot S., (2011), *Dynare: Reference Manual, Version 4, Dynare Working Papers* No. 1, Paris.
- [3] Brooks S. P., Gelman A., (1998), General Methods for Monitoring Convergence of Iterative Simulations, *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 7, 434–455.
- [4] Christiano L. J., (2007), Comment, *Journal of Business & Economic Statistics, American Statistical Association*, 25 (2), 143–151.
- [5] Christiano L. J., Eichenbaum M., Evans C., (2005), Nominal Rigidities and the Dynamic Effects of a Shock to Monetary Policy, *Journal of Political Economy*, University of Chicago Press, 113 (1), 1–45.
- [6] Del Negro M., Schorfheide F., (2004), Priors from General Equilibrium Models for VARs, *International Economic Review*, 45 (2), 643–673.
- [7] Del Negro M., Schorfheide F., Smets F., Wouters R., (2007), On the fit of New-Keynesian Models, *Journal of Business & Economic Statistics, American Statistical Association*, 25 (2), 123–143.
- [8] Erceg C. J., Henderson D. W., Levin A. T., (2000), Optimal Monetary Policy with Staggered Wage and Price Contracts, *Journal of Monetary Economics, Elsevier*, 46 (2), 281–313.
- [9] Geweke J., (1999), Using Simulation Methods for Bayesian Econometric Models: Inference, Development and Communication, *Econometric Reviews, Taylor and Francis Journals*, 18 (1), 1–73.
- [10] Poirier D. J., (1995), *Intermediate Statistics and Econometrics: A Comparative Approach*, MIT Press, Hong Kong.
- [11] Rabanal P., Rubio-Ramírez J. F., (2005), Comparing New Keynesian Models of the Business Cycle: A Bayesian Approach, *Journal of Monetary Economics, Elsevier*, 52 (6), 1151–1166.
- [12] Schorfheide F., (2000), Loss Function Based Evaluation of DSGE Models, *Journal of Applied Econometrics, John Wiley and Sons, Ltd.*, 15 (6), 645–670.
- [13] Tierney L., Kadane J. B., (1986), Accurate Approximations for Posterior Moments and Marginal Densities, *Journal of the American Statistical Association, American Statistical Association*, 81 (393), 82–86.

- [14] Wróbel-Rotter R., (2007a), Dynamic Stochastic General Equilibrium Models: Structure and Estimation, w: Welfe W., Wdowiński P., (red.), *Modelling Economies in Transition 2006*, Łódź, Wydawnictwo "Green", 9–26.
- [15] Wróbel-Rotter R., (2007b), Dynamiczne Stochastyczne Modele Równowagi Ogólnej: zarys metodologii badań empirycznych, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 48, 69–93.
- [16] Wróbel-Rotter R., (2007c), Dynamiczny Stochastyczny Model Równowagi Ogólnej: przykład dla gospodarki polskiej, *Przegląd Statystyczny*, 54 (3), 25–48
- [17] Wróbel-Rotter R., (2008), Bayesian estimation of a Dynamic General Equilibrium model, w: Welfe A., (red.), *Metody Ilościowe w Naukach Ekonomicznych*, Ósme Warsztaty Doktorskie z zakresu Ekonometrii i Statystyki, Szkoła Główna Handlowa w Warszawie – Oficyna Wydawnicza, 279–294.
- [18] Wróbel-Rotter R., (2011a), Empiryczne modele równowagi ogólnej: gospodarstwa domowe i producent finalny, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Ekonomia, 869, 109–128.
- [19] Wróbel-Rotter R., (2011b), Obszary stabilności rozwiązania empirycznych modeli równowagi ogólnej: zastosowanie metod analizy wrażliwości, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Metody analizy danych, 873, 121–135.
- [20] Wróbel-Rotter R., (2011c), Sektor producentów pośrednich w empirycznym modelu równowagi ogólnej, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Ekonomia, 872, 73–93.
- [21] Wróbel-Rotter R., (2012a), Empiryczne modele równowagi ogólnej: zagadnienia numeryczne estymacji bayerowskiej, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Metody analizy danych, 878, 143–162.
- [22] Wróbel-Rotter R., (2012b), Struktura empirycznego modelu równowagi ogólnej dla niejednorodnych gospodarstw domowych, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Ekonomia, 879, 107–126.
- [23] Wróbel-Rotter R., (2012c), Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część I: estymowane modele równowagi ogólnej w zarysie, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 53, 59–83.
- [24] Wróbel-Rotter R., (2012d), Wybrane zagadnienia współczesnego modelowania strukturalnego, część II: wnioskowanie w estymowanych modelach równowagi ogólnej, *Folia Oeconomica Cracoviensia*, 53, 85–112.
- [25] Wróbel-Rotter R., (2013a), Empiryczne modele równowagi ogólnej: zastosowanie metody dekompozycji funkcji do oceny zależności między postacią strukturalną i zredukowaną, *Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie*, seria Metody Analizy Danych, (w druku).
- [26] Wróbel-Rotter R., (2013b), Estymowane modele równowagi ogólnej i autoregresja wektorowa. Aspekty teoretyczne, *Przegląd Statystyczny*, 60 (30), 359–380.
- [27] Wróbel-Rotter R., (2013c), Estymowane modele równowagi ogólnej i wektorowa autoregresja: model hybrydowy, *Bank i Kredyt*, 44 (5), 533–570.
- [28] Wróbel-Rotter R., (2013d), Hybrydowy model wektorowej autoregresji – analiza empiryczna funkcji odpowiedzi na zakłócenia strukturalne, manuskrypt niepublikowany.

ESTYMOWANE MODELE RÓWNOWAGI OGÓLNEJ I AUTOREGRESJA WEKTOROWA.
ASPEKTY PRAKTYCZNE

Streszczenie

Model DSGE-VAR składa się z dwóch modeli wektorowej autoregresji: pierwszy z nich jest aproksymacją liniowego rozwiązania estymowanego modelu równowagi ogólnej i służy konstrukcji rozkładu *a priori* dla drugiego, szacowanego dla danych obserwowanych. Opracowanie jest poświęcone szczegółowemu omówieniu aspektów praktycznych, zawiązanych z modelami DSGE-VAR. Główny nacisk został położony na zagadnienia specyfikacji *a priori* dla parametru wagowego: rozpatrzono szereg modeli warunkowych oraz modele z estymowanym parametrem wagowym, po przyjęciu alternatywnych rozkładów *a priori*: jednostajnego, przesuniętego gamma i zmodyfikowanego rozkładu beta. Oszacowanie szeregu modeli warunkowych pozwala na ujawnienie znacznej zmienności logarytmu brzegowej gęstości obserwacji implikujących wrażliwość czynników Bayesa, istotnie zmieniających się w odpowiedzi na niewielkie zmiany specyfikacji rozkładu *a priori* dla parametru wagowego. Estymacja modelu pełnego pozwala na optymalne ustalenie rzędu opóźnienia wektorowej autoregresji oraz sprawdzenie wrażliwości wnioskowania *a posteriori* o parametrze wagowym w zależności od typu i rozproszenia rozkładu *a priori*. W drugiej części opracowania omówiono sposoby oceny stabilności numerycznej w modelach DSGE-VAR.

Słowa kluczowe: DSGE-VAR, dynamiczny stochastyczny model równowagi ogólnej, wnioskowanie bayesowskie, brzegowa gęstość obserwacji, specyfikacja rozkładu *a priori*, zbieżność MCMC

AN ESTIMATED GENERAL EQUILIBRIUM MODEL AND VECTOR AUTOREGRESSION.
PRACTICAL ISSUES

Abstract

The DSGE-VAR model consists of two models of vector autoregressions: the first one approximates the linearised solution of the dynamic stochastic general equilibrium model and is used as a tool for construction of a prior distribution for the second one, estimated with the observed data. The main purpose of the paper is to present practical aspects of DSGE-VAR estimation, verification and comparison, based on the marginal data density. It can be obtained after considering conditional models or by estimation of fully specified models, after assuming uniform, generalised gamma and modified beta distributions. The conditional models lead to serious variability of the Bayes factors that has little economic interpretation. Posterior inference for the weighting parameter from fully estimated models is less sensitive to its prior specification. In the second part of the paper author discusses convergence diagnostics used for checking stability of MCMC algorithms.

Keywords: DSGE-VAR, dynamic stochastic general equilibrium model, Bayesian inference, marginal data density, prior specification, convergence diagnostics of MCMC