PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

EMIL PANEK

NIESTACJONARNA GOSPODARKA GALE’A Z ROSNĄCĄ EFEKTYWNOŚCIĄ PRODUKCJI NA MAGISTRALI

1.WSTĘP

Mimo upływu ponad pół wieku od czasu powstania zrębów teorii magistral (por. bibliografię zamieszczoną w pracy Panek, 2011), jej zasadnicze wyniki w postaci tzw. twierdzeń o magistrali uzyskano dotąd głównie w klasie modeli stacjonarnych gospodarek typu Neumanna-Gale’a-Leontiefa. Do nielicznych należą twierdzenia o magistrali w modelach gospodarek niestacjonarnych (ze zmienną technologią; por. np. Gantz, 1980; Keeler, 1972). W nurt ten wpisują się m. in. artykuły Panek (2013a, 2013b), w których prześledzono tzw. „słaby” oraz „bardzo silny” efekt magistrali w niestacjonarnych gospodarkach von Neumanna oraz Gale’a ze zmienną technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej, determinującej kształt magistrali produkcyjnej[1].

Wprawdzie w obu wspomnianych pracach gospodarka na magistrali osiąga maksymalne tempo wzrostu, pozostaje ono jednak stałe (niezmienne w czasie) w całym okresie jej funkcjonowania. Poniżej prezentujemy dowód „słabego” twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z tempem produkcji rosnącym na magistrali z upływem czasu.

2. POSTAĆ OGÓLNA NIESTACJONARNEGO MODELU GALE’A

Standardowo przez t oznaczamy zmienną czasu przebiegającą pewien skończony zbiór okresów $T = \{0,1, ..., t_1\}$, który nazywamy horyzontem gospodarki. W gospodarce mamy skończoną liczbę n zużywanych lub wytwarzanych towarów. Symbolem $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w okresie t (wektor nakładów), a przez $y(t) = (y_1(t),...,y_n(t))$ wektor towarów wytwarzanych w okresie t (wektor produkcji). Gdy w pewnym okresie $t \in T$ z nakładów $x(t)$ można w gospodarce wytworzyć produkcję $y(t)$, to o parze $x(t)$, $y(t)$ mówimy, że tworzy dopuszczalny proces produkcji (w okresie t). Przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$ oznaczamy zbiór

[1] Pewną specyficzną klasą „macierzowych” niestacjonarnych modeli von Neumanna z graniczną technologią zajmuje się J. N. Czeremnych (1982, rozdz. 4).

wszystkich procesów produkcji dopuszczalnych w świetle technologii, jaką gospodarka dysponuje w okresie t. Zapis $(x, y) \in Z(t)$ (równoważnie $x(t), y(t) \in Z(t)$) oznacza, że w okresie t z nakładów x gospodarka jest w stanie wytworzyć produkcję y.

Przestrzenie produkcyjne ze zmienną technologią Z(t) spełniają następujące warunki:

(G1) $\forall(x^1, y^1) \in Z(t)\ \forall(x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall\alpha, \beta \geq 0\ \big((\alpha x^1 + \beta x^2, \alpha y^1 + \beta y^2) \in Z(t)\big)$.

(G2) $\forall(x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Longrightarrow y = 0)$.

(G3) $\forall(x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$.

(G4) Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ są zbiorami domkniętymi w R^{2n}.

(G5) $Z(t) \subseteq Z(t+1)$, $t = 0, 1, \ldots, t_1-1$.

Z interpretacją ekonomiczną tych warunków można zapoznać się np. w pracy Panek (2013b).

Łatwo zauważyć, że przestrzenie produkcyjne spełniające warunki **(G1)-(G5)** są stożkami domkniętymi zawartymi w R_+^{2n}, z wierzchołkami w 0. Z warunku $(x, y) \in Z(t)$ oraz $(x, y) \neq 0$ wynika, że $x \neq 0$. Dalej interesują nas tylko takie nietrywialne (niezerowe) procesy (x, y).

3. CHWILOWA RÓWNOWAGA VON NEUMANNA

Weźmy proces produkcji $(x, y) \in Z(t)$, $(x, y) \neq 0$. Liczbę

$$\alpha(x, y) = \max\{\alpha |\ \alpha x \leqq y\}$$

nazywamy tradycyjnie wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu (x, y). Można udowodnić, że funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na $Z(t)\backslash\{0\}$, zob. np. Panek (2003, rozdz.5, tw. 5.2). Liczbę

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y)\in Z(t)\backslash\{0\}} \alpha(x, y) \tag{1}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. Jeżeli spełnione są warunki **(G1)-(G5),** to zadanie (1) ma rozwiązanie, tj.

$$\exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\Big(\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\Big) \tag{2}$$

oraz

$$\alpha_{M,t+1} \geq \alpha_{M,t}\,, \quad t = 0,1,\ldots,t_1 - 1, \tag{3}$$

zob. Panek (2013b, tw.2). O parze $(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) \in Z(t)$ mówimy, że tworzy optymalny proces produkcji w okresie *t*. Z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji α wynika, iż

$$\forall\, \lambda > 0\ \big(\alpha(\bar{x}(t), \bar{y}(t)) = \alpha(\lambda\bar{x}(t), \lambda\bar{y}(t)) = \alpha_{M,t}\big),$$

co prowadzi do wniosku, że optymalne procesy produkcji są $\forall\ t \in T$ określone z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią.

Dalej zajmujemy się taką niestacjonarną gospodarką Gale'a, spełniającą warunki **(G1)-(G5)**, w której:

(G6) $\forall\ t \in T\ \exists \Big(\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t) |\ \alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \ \alpha_{M,t}\ \wedge\ \bar{y}(t) > 0\Big).$

Warunek ten głosi, że w każdym okresie horyzontu *T* można wskazać optymalny proces produkcji, w którym wytwarzane są wszystkie towary. Gospodarkę spełniającą ten warunek przyjęto nazywać regularną (Gale, 1956, Makarow, Rubinow, 1973). Z **(G6)** oraz **(G3)** wynika, że

$$\forall\ t \in T\ \exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\big(\alpha_{M,t}\bar{x}(t) = \bar{y}(t) > 0\big). \tag{4}$$

Mówiąc o optymalnym procesie produkcji w okresie *t* mamy dalej na myśli proces $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)$ spełniający warunek (4).

Niech $p(t) = (p_1(t), \ldots, p_n(t)) \geq 0$ będzie wektorem cen towarów w gospodarce w okresie *t* oraz $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)$. Liczbę

$$\beta\big(x, y, p(t)\big) = \frac{\langle p(t), y\rangle}{\langle p(t), x\rangle}$$

(tam gdzie jest określona) nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x, y) \in Z(t)$ przy cenach $p(t)$ (tutaj i dalej $\langle a, b\rangle = \sum_i a_i\, b_i$). W regularnej gospodarce Gale'a $\forall\ t \in T$ istnieje taki wektor cen $\bar{p}(t)$, przy których:

$$\forall (x, y) \in Z(t)\big(\langle\bar{p}(t), y\rangle - \alpha_{M,t}\langle\bar{p}(t), x\rangle \leq 0\big) \tag{5}$$

oraz

$$\beta(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)) = \ \max_{(x,y)\in Z(t)\setminus\{0\}} \beta(x, y, \bar{p}(t)) = \alpha_{M,t}\ , \tag{6}$$

zob. Panek (2003, rozdz. 5, tw. 5.3)[2]. Nazywamy go wektorem cen von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. O trójce $\{\alpha_{M,t}, (\bar{x}(t), \bar{y}(t)), \bar{p}(t)\}$ mówimy, że charakteryzuje niestacjonarną gospodarkę Gale'a w chwilowej równowadze von Neumanna (opisuje stan równowagi chwilowej von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a).

Zgodnie z (5), (6) równowaga chwilowa oznacza taki stan gospodarki w okresie t, mierzony wielkością produkcji i cenami, w którym dochodzi do zrównania ekonomicznej efektywności produkcji z jej efektywnością technologiczną na najwyższym, możliwym do osiągnięcia poziomie. Ceny von Neumanna oraz optymalne procesy produkcji w takiej równowadze są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią). W szczególności zakładamy, że możliwe jest ustalenie takich cen von Neumanna $\bar{p}(t)$ w poszczególnych okresach $t \in T$, aby (niezależnie od długości horyzontu T) były one nierosnące i jednostajnie ograniczone (z dołu i z góry):

(G7) $\bar{p}\,(t+1) \leqq \bar{p}(t)$ & $\exists\ 0 < \pi_{min} \leq \pi_{max} < +\infty$ $(\pi_{min} \leq \|\bar{p}(t)\| \leq \pi_{max})$

(tutaj oraz wszędzie dalej $\|a\| = \sum_i |a_i|$).

4. DYNAMIKA. MAGISTRALA PRODUKCYJNA

Weźmy proces ($x(t)$, $y(t)$ $\in$ Z (t)). Zakładamy, że gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady w okresie następnym pochodzą w niej z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim: $x(t+1) \leqq y(t)$. W świetle warunku **(G3)** prowadzi to do inkluzji:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1), \quad t = 0,1, \dots, t_1 - 1. \tag{7}$$

Ustalmy początkowy wektor produkcji:

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{8}$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (7)-(8) mówimy, że tworzy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Rozpatrzmy zadanie maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w ostatnim okresie horyzontu T, mierzonej w cenach von Neumanna $\bar{p}(t_1)$:

$$\max \langle \bar{p}(t_1), y(t_1) \rangle, \tag{9}$$

[2] W powołanej pracy dowód przeprowadzony jest wprawdzie dla stacjonarnej gospodarki Gale'a (ze stałą w czasie przestrzenią produkcyjną Z), ale w pełni stosuje się także do niestacjonarnej gospodarki spełniającej warunki **(G1)-(G6)**. Wystarczy przyjąć $Z(t) = Z$, $\bar{p}(t) = \bar{p}$ oraz $\alpha_{M,t} = \alpha_M$.

$$\text{p. w. (7), (8).} \tag{10}$$

Aby się przekonać, iż zadanie to ma rozwiązanie wystarczy zauważyć, że jest ono równoważne z zadaniem

$$\max_{y \in R_{y^0, t_1}} \langle \bar{p}(t_1), y \rangle$$

maksymalizacji liniowej (a więc ciągłej) funkcji na zwartym zbiorze $R_{y^0,t_1} = \{y |\, y = y(t_1)$ *dla pewnego* (y^0, t_1) *– dopuszczalnego procesu* $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}\}$ wektorów produkcji możliwych do wytworzenia w końcowym okresie t_1 w jakimkolwiek (y^0, t_1) – dopuszczalnym procesie wzrostu, zob. np. Panek (2003, rozdz.5, lemat 5.1). Rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ zadania (9)-(10) nazywamy $(y^0, t_1, \bar{p}(t_1))$ – optymalnym procesem wzrostu w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.

Weźmy optymalny proces produkcji $(\bar{x}(0), \bar{y}(0)) \in Z(0)$ (w okresie początkowym $t = 0$), w którym $\bar{y}(0) > 0$ (warunek regularności, zob.(4)). Istnieje wówczas optymalny proces produkcji $(\bar{x}(1), \bar{y}(1)) \in Z(1)$, w którym $\bar{x}(1) \leqq \bar{y}(0)$. Rozumując analogicznie dalej widzimy, że istnieje ciąg optymalnych procesów produkcji $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, w którym $\bar{x}(t+1) \leqq \bar{y}(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1$. Postulujemy nieco więcej, a mianowicie:

(G8) Istnieje ciąg $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ optymalnych procesów produkcji spełniających warunek (4), w którym nakłady w okresie następnym są równe produkcji wytworzonej w okresie poprzednim:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t),\ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1. \tag{11}$$

Wówczas istnieje $(\bar{y}^0, t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu postaci[3]:

$$\bar{y}(t) = \left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right) \bar{y}(0),\ \ t = 1, \dots, t_1\,. \tag{12}$$

Proces ten jest określony z dokładnością do mnożenia przez stałą dodatnią w tym sensie, że $\forall\, \lambda > 0$ proces $\{\lambda \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ jest $(\lambda \bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny. Co więcej,

$$\forall\, \lambda > 0 \left(\frac{\lambda \bar{y}(t)}{\|\lambda \bar{y}(t)\|} = \frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \frac{\left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right) \bar{y}(0)}{\left\|\left(\prod_{\tau=1}^{t} \alpha_{M,\tau}\right) \bar{y}(0)\right\|} = \frac{\bar{y}(0)}{\|\bar{y}(0)\|} = \bar{s} = const. > 0 \right), \tag{13}$$

---

[3] Proces ten początkuje wektor produkcji $\bar{y}^0$ i nie należy go mylić z procesem (y^0, t_1) – dopuszczalnym.

tj. proces taki charakteryzuje się stałą w czasie (optymalną) strukturą produkcji. Półprostą

$$N = \{\lambda\bar{s} |\ \lambda > 0\}$$

nazywamy magistralą produkcyjną (promieniem von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Na magistrali gospodarka rozwija się w maksymalnym, zmieniającym się w czasie tempie[4], zachowując przy tym jednak stałą strukturę produkcji.

5. TWIERDZENIE O MAGISTRALI

Zgodnie z (5), (6) efektywność ekonomiczna dowolnego dopuszczalnego procesu produkcji w okresie t nie przekracza technologicznej efektywności procesu optymalnego. Dalej, w celu zapewnienia jednoznaczności magistrali zakładamy, że w każdym okresie $t \in T$ efektywność ekonomiczna dowolnego procesu dopuszczalnego leżącego poza magistralą jest niższa od maksymalnej technologicznej efektywności osiąganej przez gospodarkę w tym okresie na magistrali:

(G9) $\forall\, t \in T\ \forall\, (x,y) \in Z(t)\ \left((x,y) \neq 0\ \wedge\ x \notin N \Rightarrow \beta\big(x,y,\bar{p}(t)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t),y\rangle}{\langle \bar{p}(t),x\rangle} < \alpha_{M,t}\right)$.

Jeżeli spełniony jest ten warunek, to

$$\forall\varepsilon > 0\ \forall t \in T\ \exists\delta_{\varepsilon,t} \in \big(0, \alpha_{M,t}\big)\ \forall(x,y) \in Z(t)$$
$$\left(\left\|\frac{x}{\|x\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon \Rightarrow\ \beta\big(x,y,\bar{p}(t)\big) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t}\right). \tag{14}$$

Dowód przebiega podobnie jak dowód lematu 5.2 w pracy Panek (2003)[5].

Liczby $\delta_{\varepsilon,t}$, $\alpha_{M,t}$ w (14) spełniają warunek $0 < \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} < 1$, co nie wyklucza jednak takiej mało realistycznej sytuacji, gdy przy rosnącej nieograniczenie długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$:

$$\lim_t \delta_{\varepsilon,t} = 0 \text{ dla pewnej liczby } \varepsilon > 0$$

(tj. gdy z upływem czasu efektywność ekonomiczna procesu produkcji zbliża się do optymalnej, mimo że struktura tego procesu stale odbiega o ε od struktury optymalnej $\bar{s}$). Dlatego dalej przyjmujemy, że

(G10) $\forall\varepsilon > 0\ \exists\nu_\varepsilon > 0\ \forall t_1 > 0\ \forall t \in T \left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon\right)$.

---

[4] Generalnie rosnącym ze względu na rozwój technologii, zob. (3).

[5] Należy podstawić $Z(t)$ $\alpha_{M,t}$,$\delta_{\varepsilon,t}$, zamiast Z, α_M,δ_ε

Warunek ten nie wyklucza wzrostu efektywności produkcji $\alpha_{M,t}$ (nawet nieograniczonego), ale pod warunkiem odpowiedniego (tego samego rzędu) wzrostu $\delta_{\varepsilon,t}$. W sensie geometrycznym warunek **(G9)** oznacza specyficzny kształt przestrzeni produkcyjnych $Z(t)$: stożków z upływem czasu „coraz silniej wypukłych" w otoczeniu magistral.

□ **Twierdzenie** („Słabe" twierdzenie o magistrali)
Jeżeli niestacjonarna gospodarka Gale'a spełnia warunki **(G1)-(G10)**, to $\forall\varepsilon > 0$ istnieje taka liczba naturalna k_ε, że liczba okresów czasu, w których $\left(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\right)$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełnia warunek

$$\left\|\frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon \tag{15}$$

nie przekracza k_ε. Liczba k_ε nie zależy od długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$.
Dowód. Początkowy wektor produkcji y^0 oraz wektor $\bar{s}$ struktury produkcji na magistrali są dodatnie (zob. (8), (13)), zatem istnieje taka liczba $\sigma > 0$, że $y^0 \geqq \sigma\bar{s}$. Przyjmując w (12) $\bar{y}(0) = \sigma\bar{s}$, zważywszy na **(G3),** otrzymujemy (y^0, t_1) – dopuszczalny proces $\{\tilde{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\tilde{y}(t) = \begin{cases} y^0, & dla\ t = 0, \\ \bar{y}(t), & dla\ t = 1, \dots, t_1, \end{cases}$$

w którym wektor produkcji $\bar{y}(t)$ ma postać (12). Z definicji procesu $\left(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\right)$ – optymalnego $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ wynika, że

$$\langle\bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \geq \langle\bar{p}(t_1), \tilde{y}(t_1)\rangle = \langle\bar{p}(t_1), \left(\prod_{t=1}^{t_1}\alpha_{M,t}\right)\bar{y}(0)\rangle =$$
$$= \sigma\left(\prod_{t=1}^{t_1}\alpha_{M,t}\right)\langle\bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle > 0. \tag{16}$$

Zgodnie z (5):

$$\langle\bar{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle \leq \alpha_{M,t+1}\langle\bar{p}(t+1), y^*(t)\rangle,\ \ t = 0, 1, \dots, t_1 - 1.$$

Dla $t = t_1 - 1$ mamy:

$$0 < \langle\bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\langle\bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1)\rangle.$$

Ponieważ ceny von Neumanna są określone z dokładnością do struktury, więc w myśl **(G7)** istnieje taki wektor cen $\bar{p}(t_1 - 1)$, że

$$\langle\bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1)\rangle \leq \langle\bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1)\rangle,$$

a stąd

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \alpha_{M,t_1}\langle \bar{p}(t_1-1), y^*(t_1-1)\rangle \le \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \bar{p}(t_1-1), y^*(t_1-2)\rangle.$$

Dobierając ceny $\bar{p}(t_1-2)$ tak, aby spełniony był warunek

$$\langle \bar{p}(t_1-1), y^*(t_1-2)\rangle \le \langle \bar{p}(t_1-2), y^*(t_1-2)\rangle$$

otrzymujemy

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \bar{p}(t_1-2), y^*(t_1-2)\rangle.$$

Postępując tak dalej, ostatecznie dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \prod_{t=1}^{t_1}\alpha_{M,t}\,\langle \bar{p}(0), y^0\rangle. \tag{17}$$

Oznaczmy przez L_ε zbiór okresów $\tau_1,\ldots,\tau_k < t_1$, w których zachodzi warunek (15). Wówczas, zgodnie z (14):

$$\beta\big(y^*(t), y^*(t+1), \bar{p}(t+1)\big) = \frac{\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle}{\langle \bar{p}(t+1). y^*(t)\rangle} \le \alpha_{M,t+1} - \delta_{\varepsilon,t+1}\,, \quad t \in L_\varepsilon\,,$$

czyli

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle \le \big(\alpha_{M,t+1} - \delta_{\varepsilon,t+1}\big)\langle \bar{p}(t+1), y^*(t)\rangle, \quad t \in L_\varepsilon\,,$$

co łącznie z (17) prowadzi do nierówności:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \le \Big(\prod_{\substack{t=1\\ t\notin L_\varepsilon}}^{t_1}\alpha_{M,t}\Big)\Big(\prod_{t\in L_\varepsilon}\big(\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}\big)\Big)\langle \bar{p}(0), y^0\rangle. \tag{18}$$

Łącząc (16) i (18) dochodzimy do warunku:

$$0 < \sigma\big(\prod_{t=1}^{t_1}\alpha_{M,t}\big)\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle \le \Big(\prod_{\substack{t=1\\ t\notin L_\varepsilon}}^{t_1}\alpha_{M,t}\Big)\Big(\prod_{t\in L_\varepsilon}\big(\alpha_{M,t}-\delta_{\varepsilon,t}\big)\Big)\langle \bar{p}(0), y^0\rangle\,,$$

z którego wynika, że

$$\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k}\Big(1-\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\Big) \ge \frac{\sigma\langle \bar{p}(t_1),\bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}(0), y^0\rangle} > 0.$$

Jednocześnie, zgodnie z **(G7)**

$$\frac{\sigma\langle \bar{p}(t_1),\bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}(0), y^0\rangle} \ge \frac{\sigma\|\bar{p}(t_1)\|\bar{s}_{min}}{\|\bar{p}(0)\|y^0_{max}} \ge \frac{\sigma\pi_{min}\bar{s}_{min}}{\pi_{max}y^0_{max}} = C = const. > 0,$$

gdzie $\bar{s}_{min} = \min_i \bar{s}_i > 0$, $y_{max}^0 = \max_i y_i^0 > 0$, a stąd:

$$\prod_{t=\tau_1}^{\tau_k} \left(1 - \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}}\right) \geq C > 0.$$

Wobec **(G10)** ostatecznie dochodzimy do nierówności:

$$(1 - \nu_\varepsilon)^k \geq C,$$

z której otrzymujemy oszacowanie liczby *k*:

$$k \leq \frac{\ln C}{\ln(1-\nu_\varepsilon)} = A.$$

W charakterze liczby k_ε, o której mowa w tezie twierdzenia, wystarczy wziąć najmniejszą liczbę naturalną większą od min $\{0, A\}$. Liczba ta nie zależy od długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$. ■

Twierdzenie pokazuje, że tzw. efekt magistrali – zbliżania się w długich okresach czasu optymalnych procesów wzrostu do magistrali (w sensie odległości kątowej) – ujawnia się także w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z efektywnością produkcji rosnącą nieograniczenie (np. pod wpływem postępu technologicznego). Nie jest wykluczone, że warunki **(G7)**, **(G10)** można osłabić. Wymaga to dalszych badań.

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

Czeremnych J. N., (1982), *Analiz powiedienija trajektorii dynamiki narodnochoziajstwien- nych modeliej*, Nauka, Moskwa.

Gantz D. T., (1980), A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1777–90.

Gale D., (1956), The Closed Linear Model of Production, w: Kuhn H. W., Tucker A. W., (red.), *Linear Inequalities and Related Systems*, Princeton Univ, Press, Princeton, 285–303.

Keeler E. B. (1972), A Twisted Turnpike, *International Economic Review*, 13 (1), 160–166.

Makarow W. L., Rubinow A. M., (1973), *Matiematiczeskaja tieoria ekonomiczeskoj dynamiki i rawnowiesija*, Nauka, Moskwa.

Panek E., (2003), *Ekonomia Matematyczna*, Wyd. AEP, Poznań.

Panek E., (2013a), Niestacjonarny model von Neumanna z graniczną technologią, *Studia Oeconomica Posnaniensia,* 1 (1), 49–68.

Panek E., (2013b), „Słaby" i „bardzo silny" efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291–303.

NIESTACJONARNA GOSPODARKA GALE'A Z ROSNĄCĄ EFEKTYWNOŚCIĄ PRODUKCJI NA MAGISTRALI

Streszczenie

W pracach Panek (2013a, 2013b) udowodniono „słabe" oraz „bardzo silne" twierdzenie o magistrali w modelach dynamiki ekonomicznej von Neumanna-Gale'a ze zmienną technologią zbieżną do pewnej technologii granicznej. Na magistrali produkcyjnej wyznaczonej przez technologię graniczną gospodarka osiąga najwyższe tempo wzrostu, ale jest ono stałe (niezmienne w czasie). W artykule zaprezentowano dowód magistralnych własności optymalnych procesów w takiej niestacjonarnej gospodarce Gale'a, w której – w odróżnieniu od wspomnianych wyżej prac – tempo wzrostu produkcji na magistrali rośnie pod wpływem postępu technologicznego.

Słowa kluczowe: niestacjonarny model Gale'a, równowaga chwilowa von Neumanna, magistrala produkcyjna, „słabe" i „bardzo silne" twierdzenie o magistrali

NON-STATIONARY GALE ECONOMY WITH THE TURNPIKE'S INCREASING PRODUCTION EFFICIENCY

Abstract

Papers Panek (2013a, 2013b) prove „weak" and „very strong" turnpike theorem in the Neumann-Gale model of the economic dynamics with changeable technology convergent to some limit technology. The economy achieves the highest growth rate on the production turnpike determined by the limit technology, nevertheless the growth rate is constant (time-invariant). This article presents proofs of the turnpike properties of the optimal processes in such a non-stationary Gale economy, in which – in contrast to the above-mentioned papers production growth rate on the turnpike is increasing due to technological progress.

Keywords: non-stationary Gale model, von Neumann temporary equilibrium, production turnpike, „weak" and „very strong" turnpike theorem