PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 1 – 2014

ZBIGNIEW ŚWITALSKI

STRUKTURA ZBIORU WEKTORÓW CEN RÓWNOWAGI W MODELU RYNKU TYPU GALE'A-SHAPLEYA[1]

1. WSTĘP

Rynki, na których występuje skończona liczba niepodzielnych dóbr**,** od dawna cieszyły się zainteresowaniem ekonomistów (zob. np. Shapley, Shubik, 1971/72, str. 124), chociaż bardziej intensywne badania w tym zakresie wykorzystujące metody matematyczne rozwinęły się dopiero wraz z rozwojem teorii gier.[2]

W tradycyjnej, neoklasycznej teorii rynków dóbr podzielnych wykorzystuje się silne narzędzia analityczne (np. twierdzenia o punkcie stałym), których nie da się wykorzystać do matematycznej analizy rynków dóbr niepodzielnych. Z tego punktu widzenia teoria rynków dóbr niepodzielnych może być w jakimś sensie uważana za „trudniejszą", gdyż wymaga stosowania specjalnych, osobnych narzędzi (najczęściej kombinatorycznych) dla każdego rodzaju modelu.

W teorii rynków dóbr niepodzielnych, tak jak i w teorii rynków dóbr podzielnych, typowe pytania dotyczą problemów równowagi konkurencyjnej (warunki istnienia równowagi, metody dochodzenia do równowagi). W podejściach teoriogrowych poszukuje się też rozwiązań stabilnych, tzn. należących do rdzenia odpowiedniej gry (zob. np. Shapley, Shubik, 1971/72; Shapley, Scarf, 1974).

Bardzo prosty model rynku dóbr niepodzielnych przedstawił Gale w swojej znanej książce (1960)[3]**.** W modelu Gale'a dany jest skończony zbiór kupujących K i skończony zbiór dóbr D oraz liczby $v(k, d)$ (określone dla każdego kupującego $k \in K$ i każdego dobra $d \in D$). interpretowane jako (wyrażone w pieniądzu) wartości dóbr dla poszczególnych kupujących. Ceny dóbr $p(d)$ są cenami równowagi, jeśli każdemu kupującemu k przydzielone jest dobro d maksymalizujące liczbę $v(k,d) - p(d)$ (i przydział jest jedno-jednoznaczny, zob. def. 1). Preferencje kupujących są więc

[1] Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki przyznanych na podstawie decyzji numer DEC-2011/01/B/HS4/00812.

[2] Klasyczne, często cytowane do dzisiaj prace wykorzystujące podejście teoriogrowe do analizy rynków dóbr niepodzielnych, to prace Shapleya i Shubika (1971/72) oraz Shapleya i Scarfa (1974).

[3] Istnieje przekład polski: *Teoria liniowych modeli ekonomicznych*, PWN, Warszawa 1969 (model, o którym mowa jest opisany w rozdziale V, str. 192-194).

określone za pomocą „zysków” $v(k, d) - p(d)$[4] (im większy „zysk” z zakupu dobra d, tym bardziej kupujący k jest gotowy do zakupu tego dobra).

Model Gale’a został rozbudowany do postaci „teoriogrowej” w pracy Shapleya i Shubika (1971/72), gdzie została przeprowadzona szczegółowa analiza rdzenia odpowiedniej „gry rynkowej” (graczami są kupujący, a także sprzedający będący właścicielami dóbr ze zbioru D). Modele będące rozwinięciem modelu Shapleya-Shubika (S.-S.) są intensywnie badane w ostatnich latach[5]. Bada się m.in. związki między równowagami konkurencyjnymi (walrasowskimi), a różnego rodzaju rozwiązaniami stabilnymi dla tych modeli (zob. np. Camina, 2006; Sotomayor, 2007). Modele te znalazły też zastosowanie przy analizie rynków aukcyjnych (zob. np. Mishra, Garg, 2006; Andersson, Erlanson, 2013). Mishra i Talman (2010) zbadali geometryczną strukturę zbioru wektorów cen równowagi (walrasowskiej) dla modeli typu Shapleya-Shubika (m.in. pokazali, że jest on zbiorem wypukłym).

W artykule zajmuję się innym modelem rynku dóbr niepodzielnych, którego pierwowzorem jest model rekrutacji kandydatów do szkół opisany w pracy Gale’a i Shapleya (1962). W modelu tym (który nazywam modelem rynku typu Gale’a-Shapleya lub w skrócie modelem G.-S.), przedstawionym w pracy Świtalskiego (2014), określone są ceny graniczne $r(k, d)$, gdzie liczba $r(k, d)$ jest interpretowana jako maksymalna cena, którą kupujący k gotowy jest zapłacić za dobro d, a także preferencje kupujących w zbiorze D określone jako liniowe porządki. Preferencje są tutaj dane z góry i nie zależą od liczb $r(k, d) - p(d)$, są więc, podobnie jak w neoklasycznej teorii wyboru konsumenta, niezależne od cen. Kupujący wybiera najlepsze dobro spośród tych, które spełniają warunek $r(k, d) \geq p(d)$. Liczby $r(k, d)$ mogą więc być traktowane jako ograniczenia budżetowe (w przeciwieństwie do neoklasycznej teorii wyboru konsumenta ograniczenia te mogą być tutaj różne dla różnych dóbr).

W modelu tym łatwo można zdefiniować równowagę walrasowską jako taki jedno-jednoznaczny przydział dóbr kupującym, przy którym każdy kupujący k otrzymuje najlepsze dla niego dobro wśród wszystkich dóbr d spełniających warunek $r(k, d) - p(d) \geq 0$. W pracy Świtalskiego (2014) udowodniono, że alokacje tak określonej równowagi są skojarzeniami stabilnymi w sensie Gale’a-Shapleya (i na odwrót).

W przedstawionym artykule porównuję model Gale’a z modelem typu Gale’a-Shapleya oraz badam geometryczną strukturę zbioru wektorów cen równowagi dla modelu typu G.-S. Najważniejsze wyniki dotyczące własności tego zbioru zawarte są w punkcie 5. Tam też przedstawiłem twierdzenie (tw. 3), które charakteryzuje ten zbiór jako rozłączną sumę odpowiednich prostopadłościanów (a więc nie musi on

[4] Shapley i Shubik (1971/72) używają na określenie tej różnicy terminów „profit” lub „gain”. W polskim tłumaczeniu książki Gale’a (1960) użyto terminu „dochód”. W literaturze dotyczącej modeli Shapleya-Shubika występują często terminy „payoff” lub „surplus”.

[5] W bazie czasopism wydawnictwa Elsevier znajduje się 10 artykułów opublikowanych w latach 2011-2013 poświęconych modelom S.-S. i ich uogólnieniom.

być zbiorem wypukłym, co oznacza, że struktura tego zbioru jest istotnie różna od analogicznej struktury dla modeli typu S.-S.).

2. MODEL GALE'A

W modelu Gale'a dany jest skończony zbiór kupujących K i skończony zbiór dóbr D. Oba zbiory są równoliczne. Dobrami mogą być np. domy, konie, dzieła sztuki itp. Każdy kupujący zamierza nabyć dokładnie jedno dobro. Dla każdego kupującego $k \in K$ i każdego dobra $d \in D$ określona jest liczba $v(k, d) \geq 0$, którą interpretujemy jako wartość dobra d dla kupującego k.[6]

Załóżmy, że dla każdego dobra $d \in D$ została określona cena $p(d) \geq 0$. Wektor p ze współrzędnymi $p(d)$ (indeksowanymi przez elementy zbioru D) będziemy nazywali wektorem cen. „Zysk" kupującego k związany z zakupem dobra d po cenie $p(d)$ określamy jako $z(k, d) = v(k, d) - p(d)$. Dla danego wektora cen p i danego kupującego k określamy zbiór dóbr dopuszczalnych dla k jako

$$F(p, k) = \{ d \in D\colon z(k, d) \geq 0 \}.$$

Jeśli $F(p, k) \neq \emptyset$, to zbiór dóbr optymalnych dla kupującego k określamy jako:

$$Opt\ (p, k) = \{ d \in F(p, k)\colon z(k, d) \geq z(k, c) \text{ dla każdego } c \in F(p, k)\}.$$

Dla danego dobra $d \in D$ określamy też zbiór popytowy jako:

$$D(p, d) = \{ k \in K\colon d \in Opt\ (p, k) \}.$$

Zbiór popytowy dla d jest zbiorem kupujących, dla których d jest (przy danych cenach) dobrem optymalnym, a więc takim które ci kupujący gotowi byliby nabyć.

Równowagę otrzymujemy jeśli każdemu kupującemu można przydzielić, w sposób jedno-jednoznaczny, jakieś dobro, które jest dla niego optymalne. Formalnie można to przedstawić za pomocą następujących definicji.

Definicja 1. Wektor p nazywamy wektorem cen równowagi w modelu Gale'a, jeśli istnieje taka bijekcja $u\colon K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$.

Definicja 2. Jeśli p jest wektorem cen równowagi, to taką bijekcję $u\colon K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$ nazywamy alokacją równowagi (walrasowskiej) związaną z cenami p.

---

[6] Shapley i Shubik (1971/72) traktują $v(k, d)$ jako **(**wyrażoną w pieniądzu**)** subiektywną ocenę użyteczności dobra d, którą odróżniają od oszacowania przez kupującego k rynkowej wartości dobra d.

Gale (1960) udowodnił (zob. też Shoham i Leyton-Brown, 2009), że tak zdefiniowane alokacje równowagi są rozwiązaniami klasycznego zagadnienia przydziału (zob. np. Sikora, 2008, str. 190).

Definicja 3. Wartością bijekcji u: $K \rightarrow D$ nazywamy liczbę

$$v(u) = \Sigma_{k \in K}\, v(k, u(k)).$$

Wartością bijekcji u jest więc suma wartości dóbr nabywanych przez kupujących w wyniku transakcji wyznaczonych przez bijekcję u.

Definicja 4. Bijekcja u: $K \rightarrow D$ nazywa się alokacją optymalną, jeśli dla dowolnej bijekcji w: $K \rightarrow D$ mamy $v(u) \geq v(w)$.

Twierdzenie 1. (Gale, 1960).

W modelu Gale'a alokacja u: $K \rightarrow D$ jest alokacją równowagi (dla pewnych cen równowagi p) wtedy i tylko wtedy, gdy jest alokacją optymalną.

Alokacja równowagi jest więc w modelu Gale'a sposobem przydziału dóbr kupującym, który maksymalizuje sumaryczną wartość przydzielonych dóbr. Innymi słowy, jest to optymalne rozwiązanie zagadnienia przydziału dla macierzy $\{v(k, d)\}$.

3. MODEL TYPU GALE'A-SHAPLEYA

W modelu tym zakładamy, podobnie jak to zrobił Gale w swoim modelu, że dane są skończone, równoliczne zbiory K i D (zbiór kupujących i zbiór dóbr) oraz, że każdy kupujący chciałby nabyć dokładnie jedno dobro. Zakładamy też, że dla każdego kupującego $k \in K$ i każdego dobra $d \in D$ określona jest liczba $r(k, d) \geq 0$ interpretowana jako maksymalna kwota jaką kupujący k gotowy jest przeznaczyć na zakup dobra d. Liczbę $r(k, d)$ będziemy nazywali ceną graniczną (termin ten jest używany w polskiej literaturze ekonomicznej jako odpowiednik angielskiego *reservation price*).

Liczby $r(k, d)$ mogą być różne od liczb $v(k, d)$ występujących w modelu Gale'a, chociażby ze względu na ograniczenia budżetowe, które kupujący k musi brać pod uwagę. Różnicę między liczbami $r(k, d)$ i liczbami $v(k, d)$ występującymi w modelu Gale'a najprościej wyjaśnić na przykładzie. Załóżmy np., że kupujący k rozważa zakup dwóch domów A i B[7]. Jego subiektywna wartość domu A wynosi 1 mln zł ($v(k, A) = 1$), a wartość domu B – 800 tys. zł ($v(k, B) = 0{,}8$). Kupujący k może przeznaczyć na zakup domu maksymalnie 800 tys. zł. Dom A jest gotowy do zamieszkania, natomiast dom B wymaga remontu, którego koszt kupujący k ocenia na 100 tys. zł. Jeśli więc kupujący nie chce ponosić dodatkowych kosztów, to może wydać na dom B faktycznie jedynie 700 tys. zł, wówczas $r(k, A) = 0{,}8$, $r(k, B) = 0{,}7$.

[7] Domy są przykładem dóbr niepodzielnych szczególnie często wykorzystywanym w klasycznych pracach, np. u Gale'a (1960) lub Shapleya i Shubika (1971/72). Oczywiście zakładamy tutaj, że dom może być kupiony tylko w całości.

W praktyce liczby $v(k, d)$ mogą być dla kupujących trudniejsze do określenia niż liczby $r(k, d)$, są bardziej „nieuchwytne" (podobnie jak użyteczności, którymi operuje teoria konsumenta). Wydaje się, że w wielu sytuacjach łatwiej dałoby się uzyskać od kupujących informację o cenach granicznych niż o subiektywnych wartościach dóbr (np. od kupujących przystępujących do aukcji, oczywiście kupujący, z wiadomych względów, starają się zwykle zachować tę informację dla siebie).

Oprócz liczb $r(k, d)$ w modelu G.-S. określone są preferencje kupujących w zbiorze dóbr. Zakładamy, że dla każdego kupującego $k \in K$ określony jest liniowy porządek w zbiorze D oznaczony symbolem $>_k$. Oznacza to, że dla dowolnych dwóch różnych dóbr $c, d \in D$ zachodzi dokładnie jedna z dwóch możliwości: kupujący k woli c od d (tzn. $c >_k d$) lub woli d od c ($d >_k c$). Preferencje są tutaj dane z góry, wyrażają subiektywne upodobania kupujących i nie zależą od cen $p(d)$.

W modelu Gale'a preferencje są wyznaczone za pomocą „zysków" $z(k, d) = v(k, d) - p(d)$. W modelu G.-S. preferencje nie zależą ani od liczb $r(k, d)$ ani od różnic $r(k, d) - p(d)$. Liczby $r(k, d)$ można tutaj traktować podobnie jak ograniczenia budżetowe w neoklasycznej teorii wyboru konsumenta (przy czym ograniczenia mogą być różne dla różnych dóbr). Kupujący, podobnie jak konsument w zadaniu maksymalizacji użyteczności, wybiera, zgodnie ze swoimi preferencjami, najlepsze dobro w zbiorze dóbr dopuszczalnych, tzn. takich które może zakupić w ramach istniejących ograniczeń budżetowych.

Przedstawimy teraz pewne pomocnicze definicje, za pomocą których będzie można zdefiniować równowagę w modelu G.-S. Dla danego wektora cen p i danego kupującego k określamy zbiór dóbr dopuszczalnych jako

$$F(p, k) = \{ d \in D\colon r(k, d) \geq p(d) \}.$$

Jeśli $F(p, k) \neq \varnothing$, to zbiór dóbr optymalnych dla kupującego k określamy jako:

$$Opt\ (p, k) = \{ d \in F(p, k)\colon d \geq_k c \text{ dla każdego } c \in F(p, k) \}.$$

Zauważmy, że w tym przypadku zbiór $Opt\ (p, k)$ jest zawsze jednoelementowy (gdyż $>_k$ są liniowymi porządkami). Dla danego $d \in D$ określamy zbiór popytowy jako

$$D(p, d) = \{ k \in K\colon d \in Opt\ (p, k) \}.$$

Zauważmy, że ponieważ zbiory $Opt\ (p, k)$ są jednoelementowe, więc zbiory $D(p, d)$ są rozłączne (dla różnych d).

Definicja 5. Ceny p w modelu G.-S. są cenami równowagi, jeśli istnieje taka bijekcja $u\colon K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt\ (p, k)$.

Równoważnie można zdefiniować ceny równowagi jako takie ceny p, że wszystkie zbiory $D(p, d)$ (dla $d \in D$) są jednoelementowe (zob. Świtalski, 2014).

Bijekcję, o której mowa w def. 3.1, podobnie jak w modelu Gale'a, nazywamy alokacją równowagi (walrasowskiej) związaną z cenami p.

Model G.-S. jest wzorowany na klasycznym modelu rekrutacji kandydatów do szkół opisanym przez Gale'a i Shapleya (1962) (zob. też Świtalski, 2014). W modelu rekrutacji liczba $r(k, d)$ może być interpretowana jako liczba punktów, którą posiada kandydat z przedmiotów wymaganych przez szkołę d („budżet" kandydata), a $p(d)$ – jako minimalna liczba punktów wymaganych przez szkolę d przy przyjmowaniu kandydatów („cena" miejsca w szkole d). Różnica między przedstawionym modelem, a modelem rekrutacji polega na tym, że w modelu rekrutacji szkoły przyjmują wielu kandydatów (tzn. jeśli traktować d jako miejsce w pewnej szkole, to mamy tutaj wiele identycznych „kopii" dobra d).

W modelu G.-S. równowagi są związane z pojęciem skojarzenia stabilnego wprowadzonym przez Gale'a i Shapleya (1962).

Definicja 6. Bijekcja u: $K \to D$ nazywa się skojarzeniem stabilnym, jeśli nie istnieje taka para $(k, d) \in K \times D$, że $d >_{\mathrm{k}} u(k)$ oraz $r(k, d) > r(l, d)$, gdzie l jest takim kupującym, że $u(l) = d$.

Istnienie pary (k, d) takiej jak w powyższej definicji oznaczałoby, że kupujący k woli nabyć dobro d, a nie dobro $u(k)$, które otrzymuje w alokacji u, a jednocześnie jest gotowy za to dobro zapłacić więcej niż kupujący l, który dobro to nabył. W takiej sytuacji alokacja u nie jest najkorzystniejsza ani z punktu widzenia kupującego k, ani właściciela dobra d. Brak tego rodzaju par (k, d) gwarantuje więc, że zarówno kupujący, jak i właściciele dóbr nie będą skłonni do zmiany istniejącego układu transakcji.

Przy założeniu, że dla każdego ustalonego $d \in D$ wszystkie ceny $r(k, d)$ (dla wszystkich $k \in K$) są różne, można udowodnić następujące twierdzenie będące pewną analogią do twierdzenia 1 (zob. Świtalski, 2014).

Twierdzenie 2. W modelu G.-S. alokacja u: $K \to D$ jest alokacją równowagi (dla pewnych cen równowagi p) wtedy i tylko wtedy, gdy u jest skojarzeniem stabilnym.

4. WEKTORY CEN RÓWNOWAGI W MODELU G.-S.

Na ogół w modelach równowagi jednej alokacji równowagi odpowiada wiele różnych wektorów cen równowagi. Na przykład w klasycznym modelu wymiany Arrowa-Hurwicza zbiór wektorów cen równowagi jest stożkiem, to znaczy jeśli p jest wektorem równowagi, to również wszystkie wektory postaci λp ($\lambda > 0$) są wektorami równowagi[8]. W modelach typu Shapleya-Shubika (będących rozwinięciem modelu Gale'a) zbiory wektorów cen równowagi są wypukłymi kratami zupełnymi, w szcze-

[8] Zwykle mówi się w tym przypadku, że istnieje dokładnie jeden wektor cen równowagi wyznaczony z dokładnością do stałej.

gólności dla danej alokacji równowagi istnieją maksymalny i minimalny wektory cen równowagi (zob. np. Mishra, Talman, 2010).

Zbadamy teraz strukturę zbioru wektorów cen równowagi dla modelu G.-S. Rozpoczniemy od przykładu.

Przykład. (Świtalski, 2014) Załóżmy, że mamy trzech kupujących: A, B, C oraz trzy domy na sprzedaż: X, Y, Z. Maksymalne ceny jakie kupujący są gotowi zaoferować za poszczególne domy przedstawione są w tabeli 1.

Tabela 1.

Ceny graniczne kupujących (w tys. zł)

	X	Y	Z
A	850	750	850
B	700	800	800
C	900	700	700

Preferencje kupujących są następujące: A: XYZ, B: YXZ, C: ZYX (kupującemu A najbardziej odpowiada dom X, następnie Y, a na końcu Z itd.). Łatwo sprawdzić, że jedynymi skojarzeniami stabilnymi są w tym przypadku u: $A \to X$, $B \to Y$, $C \to Z$, oraz v: $A \to Z$, $B \to Y$, $C \to X$. Są to więc (na podstawie twierdzenia 2) również jedyne alokacje równowagi. Rozważmy wektor cen $p = (850, 750, 700)$ (tzn. cena domu X jest równa $p(X) = 850$, cena $Y = p(Y) = 750$, cena $Z = p(Z) = 700$). Zbiory domów dopuszczalnych dla poszczególnych kupujących są dla wektora p następujące: $F(p, A) = \{X, Y, Z\}$, $F(p, B) = \{Y, Z\}$, $F(p, C) = \{X, Z\}$. Mamy więc domy optymalne: $Opt\ (p, A) = \{X\}$, $Opt\ (p, B) = \{Y\}$, $Opt\ (p, C) = \{Z\}$. Stąd zbiory popytowe są następujące: $D(p, X) = \{A\}$, $D(p, Y) = \{B\}$, $D(p, Z) = \{C\}$. Widać więc, że ceny p są cenami równowagi dla alokacji równowagi u. Łatwo sprawdzić, że zbiór wszystkich wektorów cen równowagi dla alokacji u jest prostopadłościanem postaci

$$EQ(u) = [0, 850] \times [0, 800] \times [0, 700].$$

Dla alokacji v odpowiedni zbiór ma postać

$$EQ(v) = (850, 900] \times (750, 800] \times (700, 850].$$

Warto krótko wyjaśnić, dlaczego w zbiorze $EQ(u)$ wszystkie przedziały są domknięte, a w zbiorze $EQ(v)$ lewostronnie otwarte. Zauważmy, że przy alokacji u wszyscy kupujący otrzymują najlepsze dla siebie domy, a więc przy dowolnym obniżaniu ceny, aż do wartości 0, zachowana zostaje równowaga, natomiast przy alokacji v i przy maksymalnych cenach równowagi (900, 800, 850) ich obniżenie może spowodować utratę stanu równowagi. Jeśli np. ceny domów będą równe (850, 800, 850), to w tym przypadku zarówno kupujący A, jak i C chcieliby nabyć dom X, a więc nie są to już ceny równowagi, chociaż cenami równowagi są dowolne ceny postaci $(850 + \varepsilon, 800, 850)$, dla dowolnego $\varepsilon \in (0, 50]$. Podobnie jest dla lewych końców pozostałych dwóch odcinków, a więc dla alokacji v przedziały wyznaczające zbiór $EQ(v)$ są lewostronnie otwarte.

Zbiór wszystkich wektorów cen równowagi można przedstawić jako

$$EQ = EQ(u) \cup EQ(v).$$

Zauważmy, ze zbiory $EQ(u)$ i $EQ(v)$ są rozłączne, zbiór $EQ(v)$ nie zawiera niektórych ścian brzegowych, zbiór EQ jest kratą zupełną zawierającą wektor maksymalny (900, 800, 850) oraz minimalny (0, 0, 0), chociaż nie jest zbiorem wypukłym.

W następnym paragrafie udowodnię, że przy założeniu, że wszystkie ceny graniczne dla kupujących są dodatnie, zbiór wektorów cen równowagi w modelu G.-S. jest zawsze rozłączną sumą wielowymiarowych prostopadłościanów, przy czym niektóre z nich mogą nie zawierać niektórych ścian (jako iloczyny kartezjańskie przedziałów lewostronnie otwartych, podobnie jak w powyższym przykładzie).

5. STRUKTURA ZBIORU WEKTORÓW CEN RÓWNOWAGI W MODELU G.-S.

Rozważamy model G.-S. z n-elementowym zbiorem kupujących K i n-elementowym zbiorem dóbr D. Zbiór wektorów cen równowagi oznaczamy symbolem EQ. Jeśli p jest wektorem cen równowagi, to alokacją równowagi odpowiadającą wektorowi p nazywamy taką bijekcję u: $K \to D$, że dla każdego $k \in K$ zachodzi $u(k) \in Opt$ (p, k) (w tym przypadku oznacza to, że $\{u(k)\} = Opt\ (p, k)$). Równowagą nazywamy parę (u, p) taką, że p jest wektorem cen równowagi, a u alokacją odpowiadającą wektorowi p. Jeśli u jest alokacją równowagi (odpowiadającą pewnemu wektorowi cen p), to zbiór wszystkich wektorów cen, którym odpowiada alokacja u oznaczamy symbolem $EQ(u)$ (ceny $p \in EQ(u)$ nazywamy też cenami równowagi dla alokacji u). Łatwo zauważyć (zob. Świtalski, 2014), że zbiór ten zawsze będzie nieskończony.

W zbiorze $EQ(u)$ określimy teraz pewien wektor cen $p(u)$ (który można nazwać granicznym wektorem cen dla alokacji u) za pomocą wzoru:

$$p(u)(d) = r(k, d),$$

gdzie k jest takim kupującym, że $u(k) = d$. Symbol $p(u)(d)$ oznacza tutaj d-tą współrzędną wektora $p(u)$. Wektor $p(u)$ jest więc wektorem cen granicznych dóbr dla kupujących, którzy przy alokacji u otrzymali te właśnie dobra.

Nietrudno zauważyć (Świtalski, 2014), że $p(u) \in EQ(u)$, tzn., że ceny $p(u)$ są cenami równowagi dla alokacji u. Okazuje się, że są to maksymalne ceny równowagi dla alokacji u, o czym mówi następujący lemat.

Lemat 1. Ceny $p(u)$ są maksymalnymi cenami równowagi dla alokacji u, tzn. jeśli (u, q) jest równowagą, dla pewnych cen q, to $p(u) \geq q$.
Dowód. Jeśli (u, q) jest równowagą to, dla każdego $k \in K$ mamy $u(k) \in Opt\ (q, k)$, a więc $u(k) \in F(q, k)$ czyli $r(k, u(k)) \geq q(u(k))$. Przyjmując $d = u(k)$ otrzymujemy, że $r(k, d) \geq q(d)$ dla każdego $d \in D$ i takiego k, że $u(k) = d$ (gdyż u jest bijekcją). Oznacza to, że $p(u)(d) \geq q(d)$ dla każdego $d \in D$, a więc $p(u) \geq q$. ■

W następnych lematach przedstawimy dalsze własności wektorów cen równowagi w modelu G.-S.
Lemat 2. Jeśli q jest wektorem cen równowagi dla alokacji u, to dowolny wektor s spełniający warunek $p(u) \geq s \geq q$ jest też wektorem cen równowagi dla alokacji u.
Dowód. Nierówności $p(u) \geq s \geq q$ implikują

$$F(p(u), k) \subset F(s, k) \subset F(q, k) \tag{1}$$

dla każdego $k \in K$. Ponieważ $p(u)$ oraz q są cenami równowagi dla u, więc dla każdego $k \in K$ dobro $u(k)$ jest optymalne zarówno w zbiorze $F(p(u), k)$, jak i w $F(q, k)$. Na podstawie warunku (1) wnioskujemy**,** że $u(k)$ jest również optymalne w $F(s, k)$. Oznacza to, że również ceny s są cenami równowagi dla u. ■

Rozważamy ponownie wektor $p(u)$ cen granicznych dla alokacji u, o współrzędnych

$$p(u)(d) = r(k, d) \qquad (u(k) = d).$$

Ustalmy $d \in D$. Niech a będzie liczbą taką, że $p(u)(d) \geq a \geq 0$. Niech $(p(u)_{\text{-d}}, a)$ będzie wektorem, który ma wszystkie współrzędne takie jak $p(u)$ oprócz współrzędnej d-tej, która jest równa a. Z lematu 2 wynika, że jeśli $(p(u)_{\text{-d}}, a)$ jest wektorem równowagi, to wszystkie takie wektory $(p(u)_{\text{-d}}, \beta)$, że $p(u)(d) \geq \beta \geq a$, są też wektorami równowagi (tzn. należą do zbioru $EQ(u)$). Niech

$$q(u)(d) = \inf \{\ a\colon p(u)(d) \geq a \geq 0 \wedge (p(u)_{\text{-d}}, a) \in EQ(u)\ \}. \tag{2}$$

Liczba $q(u)(d)$ jest wiec graniczną wartością a, dla której można zmniejszać współrzędną $p(u)(d)$ wektora $p(u)$ tak, aby zachować równowagę (tzn. tak, aby ceny $p(u)$ ze zmniejszoną wartością współrzędnej $p(u)(d)$ były w dalszym ciągu cenami równowagi dla alokacji u).

Pytamy się, kiedy

$$(p(u)_{\text{-d}}, q(u)(d)) \in EQ(u) \tag{3}$$

(z definicji $q(u)(d)$ w (2) nie wynika, że zawsze tak musi być). Odpowiedź daje poniższy lemat

Lemat 3. Jeśli wszystkie ceny graniczne $r(k, d)$ (dla $k \in K$) są dodatnie, to wektor $(p(u)_{\text{-d}}, q(u)(d))$ jest wektorem równowagi dla alokacji u wtedy i tylko wtedy, gdy $q(u)(d) = 0$.

Dowód. Zauważmy po pierwsze, że jeśli $q(u)(d) > 0$, to zależność (3) nie zachodzi. Jeśli bowiem p jest dowolnym wektorem równowagi (tzn. $p \in EQ(u)$) oraz p ma przynajmniej jedną współrzędna dodatnią, to również, dla odpowiednio małej liczby $\varepsilon > 0$ zachodzi $p(\varepsilon) \in EQ(u)$, gdzie $p(\varepsilon)$ jest wektorem powstałym z p przez zmniejszenie współrzędnych dodatnich o liczbę ε. Wynika to stąd, że zbiór wszystkich możliwych wartości cen granicznych jest skończony, a więc dla odpowiednio małego $\varepsilon > 0$ i dla dowolnego $k \in K$ mamy

$$F(p(\varepsilon), k) = F(p, k).$$

Gdyby więc (3) było prawdą dla $q(u)(d) > 0$, to moglibyśmy zmniejszyć liczbę $q(u)(d)$ o dostatecznie małą liczbę $\varepsilon > 0$ zachowując równowagę, ale to przeczyłoby definicji liczby $q(u)(d)$.

Załóżmy, że $q(u)(d) = 0$. Ponieważ wszystkie liczby $r(k, d)$ są dodatnie, więc $p(u)(d) > 0$, a więc na podstawie wzoru (2) otrzymujemy $(p(u)_{\text{-d}}, \varepsilon) \in EQ(u)$ dla odpowiednio małej liczby $\varepsilon > 0$. Podobnie, skoro wszystkie liczby $r(k, d)$ są dodatnie, to

$$F((p(u)_{-d}, \varepsilon), k) = F((p(u)_{\text{-d}}, 0), k)$$

i ostatecznie $(p(u)_{\text{-d}}, 0) \in EQ(u)$. ■

Jeśli dopuszczamy możliwość, że dla jakiegoś k zachodzi $r(k, d) = 0$, to warunek (3) dla $q(u)(d) = 0$ będzie również spełniony poza przypadkiem, gdy $p(u)(d) > 0$ oraz istnieje l takie, że $r(l, d) = 0$ i $d >_l u(l)$.

Następny lemat charakteryzuje zbiór wektorów cen równowagi w modelu G.-S. dla danej alokacji u.

Lemat 4. Niech u: $K \to D$ będzie alokacją równowagi w modelu G.-S., w którym wszystkie ceny $r(k, d)$ są dodatnie. Wektor q jest wektorem cen równowagi dla alokacji u wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego $d \in D$ mamy

$$\begin{array}{ll} 1)\ q(d) \in (q(u)(d), p(u)(d)], & \text{jeśli } q(u)(d) > 0, \\ 2)\ q(d) \in [q(u)(d), p(u)(d)], & \text{jeśli } q(u)(d) = 0. \end{array}$$

Dowód. ($\Rightarrow$) Załóżmy, że q jest wektorem równowagi. Wówczas z lematu 1, dla dowolnego $d \in D$ mamy $0 \leq q(d) \leq p(u)(d)$. A więc, jeśli $q(u)(d) = 0$, to $q(d) \in [q(u)(d), p(u)(d)]$, czyli prawdziwa jest zależność 2).

Załóżmy, że $q(u)(d) > 0$ oraz $q(d) \leq q(u)(d)$. Ponieważ q jest równowagą oraz

$$q \leq (p(u)_{\text{-d}}, q(d)) \leq p(u)$$

(gdyż dla każdego d zachodzi $q(d) \leq p(u)(d)$), więc, na podstawie lematu 2, wektor $(p(u)_{-d}, q(d))$ też jest wektorem równowagi dla alokacji u. Równość $q(d) = q(u)(d)$ jest niemożliwa na podstawie lematu 3 (bo założyliśmy, że $q(u)(d) > 0$). A więc $q(d) < q(u)(d)$. Ale na podstawie definicji $q(u)(d)$ również w tym przypadku wektor $(p(u)_{-d}, q(d))$ nie może być wektorem równowagi. Otrzymaliśmy sprzeczność, skąd wynika, że jeśli $q(u)(d) > 0$, to $q(d) > q(u)(d)$, czyli prawdziwa jest zależność 1).

($\Leftarrow$) Zakładamy, że spełnione są zależności 1) i 2). Chcemy udowodnić, że wektor q jest wektorem równowagi dla alokacji u. Ponieważ $p(u)$ jest wektorem równowagi dla u, więc dla każdego $k \in K$ mamy $\{u(k)\} = Opt\ (p(u), k)$. Ustalmy $k \in K$ i niech $d = u(k)$. Udowodnimy, że $\{d\} = Opt\ (q, k)$. Wystarczy w tym celu udowodnić, że $d \in F(q, k)$ oraz, że jeśli $c \in F(q, k)$, to $d \geq_k c$. Ponieważ $q \leq p(u)$, więc jeśli dobro d jest dopuszczalne dla kupującego k przy cenach $p(u)$, to jest również dopuszczalne dla k przy cenach q. Stąd $d \in F(q, k)$. Załóżmy, że $c \in F(q, k)$. Ponieważ wektory $(p(u)_{-c}, q(c))$ i q mają tę samą c-tą współrzędną, więc c jest dopuszczalne dla k również przy cenach $(p(u)_{-c}, q(c))$. Ale ceny $(p(u)_{-c}, q(c))$ są cenami równowagi dla alokacji u (co wynika z warunków 1) i 2) oraz definicji $q(u)(d)$). Ponieważ $u(k) = d$, więc d jest dobrem optymalnym dla kupującego k przy cenach $(p(u)_{-c}, q(c))$. Stąd $d \geq_k c$. ■

Z lematu 4 otrzymujemy jako wniosek następujące twierdzenie (Świtalski, 2014):

Twierdzenie 3. Przy założeniu, że wszystkie ceny graniczne $r(k, d)$ są dodatnie, w modelu rynku typu G.-S. zbiór wektorów cen równowagi jest rozłączną sumą prostopadłościanów postaci $P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$, gdzie każdy ze zbiorów P_t ($t = 1, 2, ..., n$) jest przedziałem postaci $(r_t, p_t]$, gdzie $0 < r_t < p_t$ lub $[0, p_t]$, gdzie $p_t > 0$.

6. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono geometryczną strukturę zbioru wektorów cen równowagi w modelu rynku typu Gale'a-Shapleya. Jak się okazuje struktura tego zbioru jest istotnie różna od struktury odpowiedniego zbioru dla modeli typu Shapleya-Shubika (dla modeli typu S.-S. zbiór wektorów cen równowagi jest zbiorem wypukłym). Model rynku typu Gale'a-Shapleya może być traktowany jako alternatywny w stosunku do modelu Shapleya-Shubika (będącego z kolei rozszerzeniem klasycznego modelu Gale'a) model rynku ze skończoną liczbą niepodzielnych dóbr. Modele typu G.-S. w przeciwieństwie do modeli S.-S. nie były do tej pory przedmiotem badań (przynajmniej z punktu widzenia teorii równowagi typu Walrasa), a wydaje się, że są warte zainteresowania ze względu na swą prostotę, naturalność i związek z dobrze znanymi modelami rekrutacji.

Uniwersytet Zielonogórski

LITERATURA

Andersson T., Erlanson A., (2013), Multi-Item Vickrey-English-Dutch Auctions, *Games and Economic Behavior*, 81, 116–129.

Camina E., (2006), A Generalized Assignment Game, *Mathematical Social Sciences*, 52, 152–161.

Gale D., (1960), *The Theory of Linear Economic Models*, The University of Chicago Press, Chicago.

Gale D., Shapley, L. S., (1962), College Admissions and the Stability of Marriage, *American Mathematical Monthly*, 69, 9–15.

Mishra D., Talman D., (2010), Characterization of the Walrasian Equilibria of the Assignment Model, *Journal of Mathematical Economics*, 46, 6–20.

Mishra D., Garg R., (2006), Descending Price Multi-Item Auctions, *Journal of Mathematical Economics*, 42, 161–179.

Shapley L. S., Scarf H., (1974), On Cores and Indivisibility, *Journal of Mathematical Economics*, 1, 23–37.

Shapley L. S., Shubik M., (1971/72), The Assignment Game I: The Core, *Int. Journal of Game Theory*, 1, 111–130.

Shoham Y., Leyton-Brown K., (2009), *Multiagent Systems – Algorithmic, Game-Theoretic and Logical Foundations*, Cambridge University Press, Cambridge.

Sikora W., (red.), (2008), *Badania operacyjne*, PWE, Warszawa.

Sotomayor M., (2007), Connecting the Cooperative and Competitive Structures of the Multiple-Partners Assignment Game, *Journal of Economic Theory*, 134, 155–174.

Świtalski Z., (2014), Równowagi cenowe w dyskretnych modelach rynku typu Gale'a-Shapleya, w: Jurek W. (red.), *Matematyka i informatyka na usługach ekonomii. Rozważania ogólne. Modele*, Wydawnictwo UE, Poznań, 145-155.

STRUKTURA ZBIORU WEKTORÓW CEN RÓWNOWAGI W MODELU RYNKU TYPU GALE'A-SHAPLEYA

S t r e s z c z e n i e

W artykule porównano model rynku dóbr niepodzielnych przedstawiony przez Gale'a (1960) w książce *The Theory of Linear Economic Models* z modelem rynku wzorowanym na modelu rekrutacji kandydatów do szkół przedstawionym przez Gale'a i Shapleya (1962). Dla modelu rynku typu Gale'a-Shapleya (który został bardziej szczegółowo opisany w pracy Świtalskiego, 2014) scharakteryzowano zbiór wektorów cen równowagi jako rozłączną sumę n-wymiarowych prostopadłościanów.

Słowa kluczowe: równowaga rynkowa, rynek dóbr niepodzielnych, model Gale'a-Shapleya, model Shapleya-Shubika

THE STRUCTURE OF THE SET OF VECTORS OF EQUILIBRIUM PRICES IN THE MARKET MODEL OF GALE-SHAPLEY TYPE

A b s t r a c t

In the paper we compare market model of Gale (1960) presented in the book *The Theory of Linear Economic Models* (for finite set of indivisible goods) with the market model based on the college admission model of Gale and Shapley (1962). For the market model of Gale-Shapley type (which was presented in details by Świtalski, 2014) we characterize the set of vectors of equilibrium prices as a disjoint union of some n-dimensional rectangular parallelepipeds.

Keywords: market equilibrium, market model for indivisible goods, Gale-Shapley model, Shapley-Shubik model