PRZEGLĄD STATYSTYCZNY
R. LXI – ZESZYT 2 – 2014

EMIL PANEK

O PEWNEJ WERSJI TWIERDZENIA O MAGISTRALI W GOSPODARCE GALE'A ZE ZMIENNĄ TECHNOLOGIĄ

1. WSTĘP[1]

Artykuł wpisuje się w nurt tych (nielicznych) prac z teorii magistral, w których dowodzi się tzw. efektu magistrali w niestacjonarnych modelach dynamiki ekonomicznej typu Neumanna-Gale'a[2]. Do jednej z takich prac należy artykuł Panek (2014), w którym udowodnione zostało tzw. „słabe" twierdzenie o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a z rosnącym tempem wzrostu produkcji na magistrali głoszące, że w długich okresach czasu (długich horyzontach gospodarki) $T = \{0,1, ..., t_1\}$, $t_1 < +\infty$, optymalne procesy wzrostu przebiegają w dowolnie bliskim (w sensie odległości kątowej) otoczeniu pewnej ścieżki wzrostu, zwanej magistralą, na której gospodarka rozwija się w najwyższym tempie.

Wykorzystując ideę dowodu twierdzenia 5 przedstawionego w pracy Panek (2013b) dowodzimy, że jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale'a – podobnej do opisanej we wspomnianej pracy Panek (2014) – optymalny proces wzrostu w pewnym okresie czasu $\check{t} < t_1$ dociera do magistrali, a ceny (von Neumanna) nie zmieniają się zbyt gwałtownie, to niezależnie od długości horyzontu (niezależnie od t_1) proces taki przez wszystkie kolejne okresy $t \in T$ pozostaje blisko magistrali, za wyjątkiem być może końcowego okresu t_1 .

2. MODEL. RÓWNOWAGA CHWILOWA VON NEUMANNA

Zakładamy, że czas t zmienia się skokowo, $t = 0, 1, 2, \dots$. W gospodarce zużywa się i wytwarza n towarów. Przez $x(t) = (x_1(t), x_2(t),...,x_n(t)) \geqq 0$ oznaczamy wektor towarów zużywanych w okresie t (wektor nakładów), a przez $y(t) = (y_1(t), y_2(t),...,y_n(t)) \geqq 0$ wektor towarów wytwarzanych w tym okresie (wektor produkcji). Jeżeli z nakładów $x(t)$ można wytworzyć produkcję $y(t)$, wtedy o parze $(x(t), y(t))$

[1] Pomysł tego artykułu zrodził się po złożeniu do druku pracy Panek (2014). Sam model, poza jednym warunkiem, nie różni się od jego wersji przedstawionej we wspomnianej pracy. Prezentujemy go maksymalnie syntetycznie, odsyłając zainteresowanego Czytelnika do pracy autora z 2014 r.

[2] Zob. np. Gantz (1980), Joshi (1997), Keeler (1972), Panek (2013a,b, 2014).

mówimy, że opisuje dopuszczalny proces produkcji w okresie t. Przez $Z(t) \subset R_+^{2n}$ oznaczamy zbiór wszystkich dopuszczalnych procesów produkcji w gospodarce w okresie $t = 0, 1, 2, \ldots$. Nazywamy go przestrzenią produkcyjną Gale'a w okresie t. Warunek $(x(t), y(t)) \in Z(t)$ (równoważnie $(x, y) \in Z(t)$ oznacza, że w okresie t z nakładów $x(t)$ możliwe jest wytworzenie produkcji $y(t)$. Przestrzenie produkcyjne $Z(t)$ spełniają następujące warunki:

(G1) $\forall (x^1, y^1) \in Z(t)\ \forall (x^2, y^2) \in Z(t)\ \forall \alpha, \beta \geq 0 \big((\alpha x^1 + \beta x^2, \alpha y^1 + \beta y^2) \in Z(t)\big)$.

(G2) $\forall (x, y) \in Z(t)\ (x = 0 \Longrightarrow y = 0)$.

(G3) $\forall (x, y) \in Z(t)\ \forall x' \geqq x\ \ \forall\ 0 \leqq y' \leqq y\ \big((x', y') \in Z(t)\big)$.

(G4) Zbiory $Z(t)$ są domknięte w R^{2n}.

Warunki powyższe obowiązują w całej pracy. Tak zdefiniowane przestrzenie produkcyjne są stożkami zanurzonymi w R_+^{2n} z wierzchołkami w 0, których kształt może zmieniać się z czasem, stosownie do zmian technologii produkcji (szerzej: postępu technologiczno-organizacyjnego) w gospodarce. Z warunku **(G2)** wynika, że jeżeli $(x, y) \in Z(t)$ oraz $(x, y) \neq 0$, to $x \neq 0$ Dalej interesują nas wyłącznie niezerowe procesy $(x(t), y(t))$.

Liczbę

$$\alpha\big(x(t), y(t)\big) = \max\{\alpha \mid \alpha x(t) \leqq y(t)\}$$

nazywamy wskaźnikiem technologicznej efektywności procesu $(x(t), y(t)) \in Z(t) \setminus\{0\}$. Funkcja α jest ciągła i dodatnio jednorodna stopnia 0 na obszarze określoności; Panek (2003, tw. 5.2). Liczbę

$$\alpha_{M,t} = \max_{(x,y) \in Z(t)\setminus\{0\}} \alpha(x, y) \tag{1}$$

nazywamy optymalnym wskaźnikiem technologicznej efektywności produkcji w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie t. Zadanie (1) ma rozwiązanie, tj.

$$\forall t \geq 0\ \exists \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\Big(\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\Big),$$

Panek (2013b, tw.2). Mówimy, że para $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big)$ opisuje optymalny proces produkcji w okresie t. Z dodatniej jednorodności stopnia 0 funkcji wynika, że procesy te są określone z dokładnością do struktury:

$$\forall t \geq 0\ \forall \lambda > 0\ \Big(\alpha\big(\lambda \bar{x}(t), \lambda \bar{y}(t)\big) = \alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\Big).$$

Zakładamy, że

(G5) W optymalnych procesach produkcji wytwarzane są wszystkie towary[3].

Wówczas z **(G1)** wynika, że

$$\forall t \geq 0\ \exists\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t)\ \Big(\alpha\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) = \alpha_{M,t}\ \&\ \alpha_{M,t}\bar{x}(t) = \bar{y}(t) > 0\Big). \quad (2)$$

Przez $p(t) = \big(p_1(t), p_2(t), \ldots, p_n(t)\big) \geq 0$ oznaczamy wektor cen towarów w niestacjonarnej gospodarce Gale'a w okresie *t*. Liczbę

$$\beta\big(x(t), y(t), p(t)\big) = \frac{\langle p(t), y(t)\rangle}{\langle p(t), x(t)\rangle}$$

nazywamy wskaźnikiem ekonomicznej efektywności procesu $(x(t), y(t))$ przy cenach $p(t)$ (przez $\langle a, b\rangle$ oznaczamy iloczyn skalarny wektorów a, b). W regularnej gospodarce Gale'a w każdym okresie $t \geq 0$ istnieją takie ceny $\bar{p}(t) \geq 0$, nazywane cenami von Neumanna, przy których

$$\beta\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{p}(t)\big) = \max_{(x,y)\in Z(t)\setminus\{0\}} \beta\big(x, y, \bar{p}(t)\big) = \alpha_{M,t}\ , \quad (3)$$

Panek (2003, tw. 5.4). Mówimy, że trójka $\{\alpha_{M,t}, \big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big), \bar{p}(t)\}$ opisuje stan chwilowej równowagi von Neumanna w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. W równowadze takiej w każdym okresie *t* dochodzi do zrównania technologicznej efektywności produkcji z efektywnością ekonomiczną i jest to zawsze najwyższa efektywność jaką może osiągnąć gospodarka. Ceny w równowadze von Neumanna są określone z dokładnością do struktury (mnożenia przez stałą dodatnią). Interesuje nas niestacjonarna gospodarka Gale'a, w której możliwe jest ustalenie takich cen $\bar{p}(t)$, aby były one nierosnące[4]:

(G6) $\forall t \geq 0\ \big(\bar{p}(t+1) \leqq \bar{p}(t)\big)$.

3. TWIERDZENIE O MAGISTRALI

Oznaczamy przez $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$, $t_1 < +\infty$, podzbiór okresów czasu, który dalej nazywamy horyzontem gospodarki. Liczba t_1 oznacza jednocześnie długość horyzontu *T*. Niech $t < t_1$. Weźmy dwa sąsiednie procesy produkcji:

[3] Tzw. warunek regularności gospodarki, zob. np. Panek (2003, rozdz. 5, pkt 5.1).

[4] Warunek jest spełniony gdy np. ceny von Neumanna są zawsze (w każdym okresie *t*) dodatnie.

$$\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t),$$
$$\big(x(t+1), y(t+1)\big) \in Z(t+1).$$

Zakładamy, że gospodarka jest zamknięta w tym sensie, że nakłady w okresie następnym mogą pochodzić tylko z produkcji wytworzonej w okresie poprzednim:

$$x(t+1) \leqq y(t),$$

co wobec **(G3)** prowadzi do warunku:

$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1), \quad t = 0,1,\dots,t_1 - 1. \tag{4}$$

Ustalmy początkowy wektor produkcji:

$$y(0) = y^0 > 0. \tag{5}$$

O ciągu wektorów $\{y(t)\}_{t=0}^{t_1}$ spełniającym warunki (4), (5) mówimy, że opisuje (y^0, t_1) – dopuszczalny proces wzrostu (trajektorię produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a. Weźmy ceny von Neumanna $\bar{p}(t_1)$ i rozpatrzmy następujące zadanie wzrostu docelowego (maksymalizacji wartości produkcji wytworzonej w gospodarce w ostatnim okresie horyzontu T):

$$\max \langle \bar{p}(t_1), y(t_1)\rangle,$$
$$\big(y(t), y(t+1)\big) \in Z(t+1), \quad t = 0,1,\dots,t_1 - 1,$$
$$y(0) = y^0 > 0.$$

Jego rozwiązanie $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ nazywamy $\big(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\big)$ – optymalnym procesem wzrostu (trajektorią produkcji) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a.[5] Zauważmy, że biorąc dowolny optymalny proces produkcji $\big(\bar{x}(t), \bar{y}(t)\big) \in Z(t), t = 0,1,\dots,t_1 - 1,$ można zawsze decydują o tym warunki **(G1**), **(G5)**) wskazać taki optymalny proces produkcji $(\bar{x}(t+1), \bar{y}(t+1)) \in Z(t+1)$, że

$$\bar{x}(t+1) \leqq \bar{y}(t).$$

[5] Przy przyjętych założeniach zadanie to ma rozwiązanie. Dowód przebiega podobnie jak dowód tw. 5.7 w pracy Panek (2003).

Zakładamy, że

(G7) Niezależnie od długości horyzontu $T = \{0, 1, \ldots, t_1\}$ stnieje ciąg optymalnych procesów produkcji $\{\bar{x}(t), \bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$, , w którym:

$$\bar{x}(t+1) = \bar{y}(t).$$

Wówczas ciąg $\{\bar{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$ tworzy $(\bar{y}(0), t_1)$ – dopuszczalny proces wzrostu, w którym

$$\bar{y}(t+1) = \alpha_{M,t+1}\,\bar{y}(t) > 0, \quad t = 0, 1, \ldots, t_1 - 1, \tag{6}$$

czyli

$$\forall t_1 \geq 1 \forall t \in T = \{0, 1, \ldots, t_1\} \left(\frac{\bar{y}(t)}{\|\bar{y}(t)\|} = \bar{s} = \text{const} > 0 \right),$$

(tutaj i dalej $\|a\| = \sum_i a_i$). Proces taki charakteryzuje się stałą w czasie (optymalną) strukturą produkcji $\bar{s}$ oraz maksymalnym (choć zmiennym w czasie) tempem wzrostu produkcji. Półprosta

$$N = \{\lambda\bar{s} | \lambda > 0\}$$

wyznacza tzw. magistralę produkcyjną (promień von Neumanna) w niestacjonarnej gospodarce Gale'a, na której produkcja rośnie z okresu na okres w maksymalnym tempie. Wszystkie procesy wzrostu postaci (6) leżą na magistrali.

Zgodnie z (3) ekonomiczna efektywność $\beta\big(x(t), y(y), \bar{p}(t)\big)$ dowolnego procesu produkcji $\big(x(t), y(t)\big) \in Z(t) \setminus \{0\}$ nie przekracza technologicznej efektywności $\alpha_{M,t}$. Maksymalną technologiczną efektywność gospodarka osiąga na magistrali. Dochodzi wówczas do zrównania obu tych efektywności (i to na najwyższym możliwym do osiągnięcia poziomie). Zasadne jest więc przyjęcie, że:

(G8) $\forall t \geq 0 \forall (x(t), y(t)) \in Z(t) \big(x(t) \notin N \Longrightarrow \beta(x(t), y(t), \bar{p}(t)\big) < \alpha_{M,t}$.

Jeżeli spełniony jest ten warunek, to:

$$\forall t \geq 0\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_{\varepsilon,t} \in \big(0, \alpha_{M,t}\big)\ \forall (x(t), y(t)) \in Z(t) \left(\left\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|} - \bar{s} \right\| \geq \varepsilon \Longrightarrow \right.$$

$$\left. \beta\big(x(t), y(y), \bar{p}(t)\big) \leq \alpha_{M,t} - \delta_{\varepsilon,t} \right), \tag{7}$$

Panek (2003, lemat 5.2)[6]. Aby wykluczyć sytuację, gdy z upływem czasu dla pewnej liczby $\varepsilon > 0$

$$\lim_t \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} = 0$$

zakładamy, że:[7]

(G9) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \nu_\varepsilon > 0 \; \forall t \geq 0 \left(\frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} \geq \nu_\varepsilon \right).$

Przypadek $\lim_t \frac{\delta_{\varepsilon,t}}{\alpha_{M,t}} = 0$ jest mało realistyczny. Oznacza, że z czasem efektywność ekonomiczna procesu zbliża się do optymalnej nawet wówczas, gdy struktura procesu odbiega stale od optymalnej o ustaloną wielkość $\varepsilon > 0$ Ponieważ $\delta_{\varepsilon,t} \in (0, \alpha_{M,t})$, więc $\nu_s \in (0,1)$.

□ **Twierdzenie** (o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale'a)

Ustalmy horyzont T = {0,1,..., t_1} ($0 < t_1 < +\infty$) i weźmy liczbę $\varepsilon > 0$ Niech liczba ν_ε spełnia warunek **(G9)** oraz $\left(y^0, t_1, \bar{p}(t_1)\right)$ – optymalny proces wzrostu $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ w pewnym okresie $\check{t} < t_1$ dociera do magistrali:

$$y^*(\check{t}) \in N.$$

Jeżeli zachodzą warunki **(G1)** – **(G8)** oraz ceny von Neumanna w okresach $\check{t}$+1,…, t_1 spełniają warunek[8]:

$$\frac{\max\limits_{t\in\{\check{t}+1,\ldots,t_1\}} \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle}{\min_{t\in\{\check{t}+1,\ldots,t_1\}} \langle \bar{p}(t), \bar{s} \rangle} < \frac{1}{1-\nu_\varepsilon}, \tag{8}$$

to

$$\forall t \in \{\check{t}+1, \ldots, t_1 - 1\} \left(\left\| \frac{y^*(t)}{\|y^*(t)\|} - \bar{s} \right\| < \varepsilon \right).$$

[6] Warunek głosi, że efektywność ekonomiczna dowolnego procesu, w którym struktura produkcji różni się od magistralnej, jest niższa od maksymalnej efektywności możliwej do osiągnięcia na magistrali.

[7] Z geometrycznego punktu widzenia warunek **(G9)** wyklucza sytuację, w której przy $t \longrightarrow +\infty$ stożki $Z(t)$ „puchną" w otoczeniu magistrali N.

[8] Ceny spełniające ten warunek nie zmieniają się gwałtownie.

Dowód. Z (3), (4) oraz definicji funkcji β wnioskujemy, że

$$\langle \bar{p}(t+1), y^*(t+1)\rangle \leq \alpha_{M,t+1}\langle \bar{p}(t+1), y^*(t)\rangle,\ t = 0,1,\dots,t_1 - 1,$$

Dla $t = t_1 - 1$ mamy:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1)\rangle.$$

W myśl **(G6)**

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1 - 1)\rangle \leq \langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 1)\rangle,$$

a stąd

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \alpha_{M,t_1}\alpha_{M,t_1-1}\langle \bar{p}(t_1 - 1), y^*(t_1 - 2)\rangle.$$

Postępując tak dalej dochodzimy do warunku:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t}\, \langle \bar{p}(\check{t}), y^*(\check{t})\rangle.$$

Ponieważ $y^*(\check{t}) \in N$, więc

$$\exists \sigma > 0\ (y^*(\check{t}) = \sigma\bar{s} > 0)$$

(należy przyjąć $\sigma = \min_i \frac{y_i^*(\check{t})}{\bar{s}_i}$), czyli:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \sigma \prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t}\, \langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s}\rangle. \tag{9}$$

Załóżmy, że

$$\exists\ t' \in \{\check{t}+1,\dots,t_1 - 1\}\left(\left\|\frac{y^*(t')}{\|y^*(t')\|} - \bar{s}\right\| \geq \varepsilon\right).$$

Wówczas, zgodnie z (7),

$$\beta\big(y^*(t'), y^*(t'+1), \bar{p}(t'+1)\big) \leq \alpha_{M,t'+1} - \delta_{\varepsilon,t'+1},$$

czyli

$$\langle \bar{p}(t'+1), y^*(t'+1)\rangle \leq \left(\alpha_{M,t'+1} - \delta_{\varepsilon,t'+1}\right)\langle \bar{p}(t'+1), y^*(t')\rangle. \qquad (10)$$

Łącząc (9), (10) mamy:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \leq \sigma\big(\prod_{\substack{t=\check{t}+1\\ t\neq t'+1}}^{t_1} \alpha_{M,t}\big)\left(\alpha_{M,t'+1} - \delta_{\varepsilon,t'+1}\right)\langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s}\rangle. \qquad (11)$$

Utwórzmy następujący ciąg wektorów produkcji $\{\check{y}(t)\}_{t=0}^{t_1}$:

$$\check{y}(t) = \begin{cases} y^*(t), & t = 0, 1, \dots \check{t}, \\ \sigma\bar{s}\prod_{\tau=\check{t}+1}^{t} \alpha_{M,\tau}, & t = \check{t}+1, \dots t_1. \end{cases}$$

Ciąg ten tworzy proces (y^0, t_1) – dopuszczalny, który dostajemy „ze sklejenia” początkowego fragmentu optymalnej trajektorii $\{y^*(t)\}_{t=0}^{t_1}$ (dla $t \leq \check{t}$) i dopuszczalnej trajektorii postaci (6) (dla $t > \check{t}$). Z definicji procesu optymalnego:

$$\langle \bar{p}(t_1), y^*(t_1)\rangle \geq \langle \bar{p}(t_1), \check{y}(t_1)\rangle = \sigma\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t})\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle. \qquad (12)$$

Z (11), (12) otrzymujemy nierówność:

$$0 < \sigma\prod_{t=\check{t}+1}^{t_1} \alpha_{M,t})\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle \leq \sigma\big(\prod_{\substack{t=\check{t}+1\\ t\neq t'+1}}^{t_1} \alpha_{M,t}\big)\left(\alpha_{M,t'+1} - \delta_{\varepsilon,t'+1}\right)\langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s}\rangle,$$

z której – zważywszy na warunki **(G9)** i (8) – wynika, że

$$0 < \frac{1}{1-\nu_\varepsilon} \leq \frac{\alpha_{M,t'+1}}{\alpha_{M,t'+1} - \delta_{\varepsilon,t'+1}} \leq \frac{\langle \bar{p}(\check{t}), \bar{s}\rangle}{\langle \bar{p}(t_1), \bar{s}\rangle} < \frac{1}{1-\nu_\varepsilon}.$$

Otrzymana sprzeczność zamyka dowód. ■

4. UWAGI KOŃCOWE

Przedstawiony model różni się od większości znanych wersji modelu Neumanna-Gale'a przede wszystkim założeniem o zmiennej technologii (zmieniających w czasie przestrzeniach produkcyjnych $Z(t)$). Gospodarka może rozwijać się w maksymalnym tempie (różnym w różnych okresach) pod warunkiem osiągnięcia optymalnej struktury produkcji charakterystycznej dla magistrali N (swoista „droga najszybszego ruchu" gospodarki). W standardowych, stacjonarnych modelach Neumanna-Gale'a (ze stałą technologią) dowodzi się wówczas, że niezależnie od długości horyzontu $T = \{0,1,..., t_1\}$ optymalny proces wzrostu:

- przebiega w dowolnie bliskim otoczeniu magistrali, za wyjątkiem co najwyżej pewnej liczby okresów początkowych i końcowych (innymi słowy, im dłuższy jest horyzont, tym dłużej w jego środkowym okresie gospodarka rozwija się w otoczeniu magistrali),
- jeżeli w pewnym okresie $\check{t}$ gospodarka dociera do magistrali, wtedy pozostaje na niej przez wszystkie następne okresy horyzontu T, poza co najwyżej (jednym) końcowym okresem t_1 .

Pierwszą grupę twierdzeń przyjęto w literaturze nazywać „silnymi", drugą „bardzo silnymi" twierdzeniami o magistrali[9]. Przedstawione w artykule twierdzenie jest ogniwem pośrednim między wersją „silną" i „bardzo silną". Co istotne na tle literatury, jego dowód nie wymaga dodatkowych założeń o kierunkach zmian technologii w gospodarce[10].

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu

LITERATURA

Czeremnych J. N., (1982), *Analiz powiedienija trajektorii dynamiki narodnochoziajstwien- nych modeliej*, Nauka, Moskwa.

Gantz D., (1980*)*, A Strong Turnpike Theorem for a Nonstationary von Neumann-Gale Production Model, *Econometrica*, 48 (7), 1977-90.

Joshi S., (1997), Turnpike Theorems in Nonconvex Nonstationary Envirenments, *International Economic Review*, 38 (1), 225-248.

Keeler E. B., (1972), A Twisted Turnpike, *International Economic Review*, 13 (1), 160-166.

Panek E., (2003), *Ekonomia matematyczna*, Wyd. AEP, Poznań.

Panek E., (2013a), Niestacjonarny model von Neumanna z graniczną technologią, *Studia Oecnomica Posnaniensia*, 1 (1), 49-68.

---

[9] Zob. np. Takayama (1985, rozdz. 7), Panek (2013a,b).

[10] Mamy na myśli te nieliczne prace, m.in. Czeremnych (1982, rozdz. 4), Panek (2013a,b), w których przy dowodach magistralnych własności niestacjonarnych gospodarek Neumanna-Gale'a (ze zmienną technologią) zakłada się zbieżność technologii do pewnej technologii granicznej.

Panek E., (2013b), „Słaby” i ”bardzo silny” efekt magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a z graniczną technologią, *Przegląd Statystyczny*, 60 (3), 291-303.
Panek E., (2014), Niestacjonarna gospodarka Gale’a z rosnącą efektywnością produkcji na magistrali, *Przegląd Statystyczny*, 61 (1), 6-15.
Takayama A., (1985), *Mathematical Economics*, Cambrige Univ. Press, Cambridge.

O PEWNEJ WERSJI TWIERDZENIA O MAGISTRALI W GOSPODARCE GALE’A ZE ZMIENNĄ TECHNOLOGIĄ

Streszczenie

Artykuł wpisuje się w nurt nielicznych prac z ekonomii matematycznej, zawierających dowody tzw. twierdzeń o magistrali w modelach niestacjonarnych gospodarek typu Neumanna-Gale’a. Wykorzystując ideę dowodu twierdzenia 5 przedstawionego w pracy Panek (2013b) udowodniono wersję pośrednią- między „silną” i „bardzo silną” – twierdzenia o magistrali w niestacjonarnej gospodarce Gale’a głoszącą, że jeżeli w niestacjonarnej gospodarce Gale’a optymalny proces wzrostu w pewnym okresie czasu dociera do magistrali, a ceny (von Neumanna) nie zmieniają się zbyt gwałtownie, to niezależnie od długości horyzontu proces taki przez wszystkie kolejne okresy (za wyjątkiem co najwyżej ostatniego) przebiega w pobliżu magistrali.

Słowa kluczowe: niestacjonarna gospodarka Gale’a, przestrzeń produkcyjna, technologiczna i ekonomiczna efektywność produkcji, równowaga von Neumanna, magistrala produkcyjna

A NEW APPROACH TO THE TURNPIKE THEOREM IN THE GALE ECONOMY WITH CHANGEABLE TECHNOLOGY

Abstract

This article is part of a trend of few works of mathematical economics containing proofs of the so-called turnpike theorems in the non-stationary Neumann-Gale economies. Using the idea of the proof of theorem 5 in the article Panek (2013b) the intermediate version was proven, that stands between the “strong” and the “very strony” turnpike theorem in the non-stationary Gale economy. It states that if in the non-stationary Gale’s economy the optimal growth process in a certain period of time reaches the turnpike and the (von Neumann) prices do not change to abruptly, than irrespectively of the length of the horizon, such a process for all subsequent periods (except for perhaps the final time) can be found in the turnpike’s proximity.

Keywords: non-stationary Gale economy, production set, technological and economic production efficiency, von Neumanna equilibrium, production turnpike